



# Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures

Jean-Marc Martinez

## ► To cite this version:

Jean-Marc Martinez. Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2005. Français. NNT : . tel-00461986

**HAL Id: tel-00461986**

**<https://theses.hal.science/tel-00461986>**

Submitted on 8 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MECANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Jean-Marc MARTINEZ**

le 27 avril 2005

Titre :

**MODÉLISATION ET CARACTÉRISATION DU  
COMPORTEMENT HYPER-VISCO-PLASTIQUE  
D'UN ÉLASTOMÈRE SOUS SOLLICITATIONS  
MULTI-HARMONIQUES ET À DIFFÉRENTES  
TEMPÉRATURES**

---

**Directeurs de thèse :**

Adnane BOUKAMEL – Thierry DESOYER

---

**JURY**

Mr C. FOND,	Professeur, Université de Strasbourg	Président
Mr A. DRAGON	Directeur de recherche, LMPM	Rapporteur
Mr A. CHRYSOCHOOS	Professeur, Université Montpellier 2	Rapporteur
Mr E. VERRON	Maître de Conférence, Ecole Centrale de Nantes	Examineur
Mr C. LOUIS	Ingénieur EUROCOPTER, Etablissement de Marignane	Examineur
Mr P. GODIOT	Ingénieur EUROCOPTER, Etablissement de Marignane	Invité
Mr S. MÉO	Maître de Conférence, Ecole d'Ingénieurs de Tours	Invité
Mr T. DESOYER	Professeur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	
Mr A. BOUKAMEL	Enseignant-Chercheur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	



UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MECANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Jean-Marc MARTINEZ**

le 27 avril 2005

Titre :

**MODÉLISATION ET CARACTÉRISATION DU  
COMPORTEMENT HYPER-VISCO-PLASTIQUE  
D'UN ÉLASTOMÈRE SOUS SOLLICITATIONS  
MULTI-HARMONIQUES ET À DIFFÉRENTES  
TEMPÉRATURES**

---

**Directeurs de thèse :**

Adnane BOUKAMEL – Thierry DESOYER

---

**JURY**

Mr C. FOND,	Professeur, Université de Strasbourg	Président
Mr A. DRAGON	Directeur de recherche, LMPM	Rapporteur
Mr A. CHRYSOCHOOS	Professeur, Université Montpellier 2	Rapporteur
Mr E. VERRON	Maître de Conférence, Ecole Centrale de Nantes	Examineur
Mr P. LEGENDRE	Ingénieur EUROCOPTER, Etablissement de Marignane	Examineur
Mr P. GODIOT	Ingénieur EUROCOPTER, Etablissement de Marignane	Invité
Mr S. MÉO	Maître de Conférence, Ecole d'Ingénieurs de Tours	Invité
Mr T. DESOYER	Professeur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	Examineur
Mr A. BOUKAMEL	Enseignant-Chercheur, Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille	Examineur



*A ma mère,  
A mes soeurs "Cynthia et Christelle",  
A ma bien aimée "Phanie",*



## Remerciements

Il m'est m'impossible de vous proposer cet ouvrage sans présenter les personnes qui ont permis son élaboration :

Ainsi, je tiens à remercier Stéphane Méo, collaborateur passionnant, dont j'ai eu l'honneur de poursuivre les travaux. Nous avons débuté ce projet en sa compagnie et son empreinte reste présente sur une bonne partie de ce travail. Il restera pour moi l'exemple à suivre et il aura été une condition nécessaire à l'existence de cette aventure. Sa rigueur est certainement l'une de ses qualités premières et il m'a fait le plaisir de m'en transmettre le goût.

J'aimerais aussi adresser mes vifs remerciements à Jean-Marie Rossi pour la lecture et la relecture de ce manuscrit permettant ainsi de ne pas en faire un recueil de fautes d'orthographe et de grammaire. Bien que quelque peu éloigné de la thématique des élastomères, sa disponibilité, ses suggestions et ses encouragements répétés ont contribué certainement plus qu'il ne le pense à l'aboutissement de ce travail.

Merci également à Stéphane Lejeunes compagnon de tous les efforts, pour sa bonne humeur quotidienne, son soutien de chaque instant et l'écoute qu'il m'a accordée. Il m'a tiré vers le haut et a permis de faire évoluer en moi des compétences que je ne soupçonnais pas. Quelque soit le destin où le vent emportera sa voile, il pourra compter sur toute ma reconnaissance.

Je remercie plus particulièrement et du fond de mon être, mon Directeur de Thèse, Adnane Boukamel, sans qui ce projet n'aurait jamais abouti. J'aurai certainement lutté en vain sans ses précieux conseils scientifiques. Il m'a transmis cette volonté, cette lutte, cet acharnement de tous les jours qui m'ont permis de tenir jusqu'au bout. Je ne peux que lui dédier cet ouvrage.

Je tiens à remercier aussi Messieurs André Dragon et André Chrysochoos d'avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux de thèse. Je remercie aussi Messieurs les membres du Jury Thierry Désoyer, Erwan Verron, Charles Louis, Patrice Godiot d'avoir accordé le temps nécessaire à la lecture de ce manuscrit et à l'écoute attentive de ma soutenance et surtout Monsieur Christophe Fond d'en avoir accepté la présidence.

Je ne saurais conclure ces remerciements sans une pensée pour tous les membres du laboratoire ou de l'école avec lesquels j'ai pu partager des moments inoubliables. Merci à tous, Bernard D., Bruno C., Christian E., Franck P., Frederic M., Guillaume C., Hélène M., Jean G., Jean-Michel I., Julie G., Marylène L., Mohamed B., Norbert D., Olivier D., Philippe J., Remy A., Stéphane B.

Aujourd'hui, je suis heureux et fier d'avoir concrétisé ce défi. Et soyez fier vous aussi d'avoir fait de moi ce que je suis devenu !







---

# Sommaire

## Glossaire

<b>Introduction générale</b>
------------------------------

<b>Chapitre I</b>
-------------------

<b>Généralités sur les élastomères</b>
--

I.1	Du caoutchouc, vers les matériaux synthétiques . . . . .	7
I.2	Structure macromoléculaire . . . . .	8
I.3	Etat de la matière des polymères amorphes . . . . .	11
I.4	Elasticité caoutchoutique : une grande déformabilité . . . . .	12
I.5	Les élastomères chargés . . . . .	14
I.5.1	Renforcement des propriétés d'usage . . . . .	14
I.5.2	Autres effets sous chargement cyclique . . . . .	16
I.6	Conclusion . . . . .	20

<b>Chapitre II</b>
--------------------

<b>Contexte industriel</b>
----------------------------

II.1	Les caoutchoucs silicones chargés . . . . .	23
II.1.1	Généralités . . . . .	23
II.1.2	Le matériau de l'étude : Silicone VHDS 1029 . . . . .	23
II.2	Utilisation industrielle . . . . .	27

II.2.1	Propriété d'amortissement . . . . .	27
II.2.2	Fonctionnement d'un moyeu rotor . . . . .	28
II.2.3	Adaptateur de fréquence . . . . .	30
II.2.4	Problématique industrielle . . . . .	32

### Chapitre III

#### Campagne expérimentale réalisée sur l'élastomère silicone VHDS 1029

III.1	Présentation . . . . .	37
III.1.1	Géométrie des éprouvettes . . . . .	37
III.1.2	Moyens expérimentaux . . . . .	38
III.2	Assouplissement des éprouvettes : effet MULLINS . . . . .	41
III.3	Procédure d'exploitation des résultats . . . . .	42
III.3.1	Essais de relaxation . . . . .	42
III.3.2	Essais cycliques . . . . .	42
III.4	Essais de traction uniaxiale . . . . .	44
III.4.1	Montée en charge . . . . .	44
III.4.2	Relaxation . . . . .	45
III.4.3	Traction cyclique . . . . .	50
III.5	Essais de double cisaillement . . . . .	53
III.5.1	Charge-décharge à basse vitesse de déformation . . . . .	53
III.5.2	Relaxation . . . . .	54
III.5.3	Essais cycliques triangulaires . . . . .	59
III.5.4	Essais cycliques sinusoïdaux . . . . .	63
III.6	Conclusion . . . . .	72

### Chapitre IV

#### Matériaux à comportement hyperélastique

IV.1	Principales notations utilisées . . . . .	81
IV.2	Généralités : écriture du comportement élastique . . . . .	81
IV.3	Loi de comportement hyperélastique . . . . .	82
IV.4	Matériau incompressible . . . . .	87
IV.5	Modélisation des énergies de déformation . . . . .	88
IV.5.1	Approches statistiques . . . . .	88
IV.5.2	Modèles phénoménologiques . . . . .	89
IV.6	Identification des caractéristiques hyperélastiques . . . . .	91
IV.6.1	Etude analytique . . . . .	91
IV.6.2	Résultats d'identification . . . . .	92

IV.7 Conclusion . . . . .	100
---------------------------	-----

## Chapitre V

### Premières approches du comportement dissipatif

V.1 Introduction . . . . .	103
V.2 Synthèse bibliographique sur les modèles de comportement dissipatif . . . . .	104
V.2.1 Le comportement viscoélastique . . . . .	104
V.2.2 Le comportement élastoplastique : frottement interne non visqueux . . . . .	114
V.2.3 L'endommagement des élastomères chargés . . . . .	122
V.2.4 Bilan . . . . .	128
V.3 Présentation des modèles viscoélastiques et élastoplastiques . . . . .	130
V.3.1 Synthèse du formalisme mécanique adopté . . . . .	130
V.3.2 Modèles de comportement viscoélastique . . . . .	131
V.3.3 Modèles de comportement élastoplastique . . . . .	136
V.4 Campagne d'identification des modèles . . . . .	139
V.4.1 Méthode d'identification . . . . .	139
V.4.2 Résultats d'identification . . . . .	142
V.5 Conclusion . . . . .	154

## Chapitre VI

### Approche statistique d'un modèle hyper-visco-plastique

VI.1 Approche statistique hyper-visco-élastique . . . . .	159
VI.1.1 Présentation du modèle . . . . .	159
VI.1.2 Résultats d'identification . . . . .	166
VI.2 Prise en compte de la plasticité . . . . .	168
VI.2.1 Association d'une branche élasto-plastique . . . . .	168
VI.2.2 Elaboration d'une stratégie d'identification . . . . .	170
VI.2.3 Résultats d'identification . . . . .	171
VI.3 Confrontation modèles/expériences . . . . .	175
VI.3.1 Sollicitations cycliques sinusoïdales . . . . .	175
VI.3.2 Sollicitations sinusoïdales à deux harmoniques . . . . .	177
VI.3.3 Sollicitations sinusoïdales à trois harmoniques . . . . .	180
VI.3.4 Sollicitations cycliques sinusoïdales avec pré-déformation . . . . .	181
VI.4 Influence des paramètres matériaux . . . . .	182
VI.5 Vers une interprétation physique du modèle . . . . .	186
VI.6 Identification des paramètres à différentes températures . . . . .	189
VI.6.1 Présentation . . . . .	189

VI.6.2 Résultats d'identification . . . . .	189
VI.6.3 Evolution des paramètres suivant la température . . . . .	198
VI.7 Conclusion . . . . .	201

## Conclusion générale

## Bibliographie

## Table des figures

## Liste des tableaux

## Annexe A

### Thermodynamique appliquée aux grandes déformations

A.1 Formalisme des grandes déformations . . . . .	233
A.1.1 Description du mouvement . . . . .	233
A.1.2 Expression des déformations . . . . .	233
A.1.3 Vitesse de déformation . . . . .	236
A.1.4 Description des efforts . . . . .	236
A.1.5 Equations d'équilibre statique . . . . .	238
A.1.6 Hypothèse des petites perturbations . . . . .	239
A.2 Lois de comportement . . . . .	239
A.3 Cadre thermodynamique . . . . .	240
A.4 Pseudo-potentiel de dissipation et lois complémentaires . . . . .	243
A.5 Notion d'états intermédiaires [SIDOROFF, 1973, 1974, 1976] . . . . .	244
A.5.1 Application à un état intermédiaire quelconque . . . . .	244
A.5.2 Milieu à plusieurs configurations . . . . .	245
A.5.3 Lois constitutives . . . . .	247
A.5.4 Généralisation des modèles rhéologiques aux grandes déformations . . . . .	248
A.5.5 Milieux incompressibles . . . . .	249
A.6 Aspect théorique du couplage thermo-mécanique . . . . .	251

## Annexe B

### Expression analytique de la contrainte en traction simple et en cisaillement simple pour les matériaux à comportement hyperélastique incompressible

B.1 Application en traction simple . . . . .	257
B.2 Application en cisaillement simple . . . . .	258

**Annexe C****Introduction à la rhéologie des matériaux**

C.1	Présentation des modèles rhéologiques . . . . .	261
C.1.1	Éléments analogiques de base . . . . .	261
C.1.2	Essais caractéristiques de classification des solides réels . . . . .	263
C.1.3	Schématisation des comportements réels . . . . .	268
C.2	Modèles fractionnaires et méthode d'analyse complexe . . . . .	281
C.2.1	Formulation générale des modèles fractionnaires, SNOWDON [1968] . . . .	282
C.2.2	Application à la caractérisation dynamique des matériaux . . . . .	285



# Glossaire

## ◇ CONFIGURATIONS D'ÉTUDE

$C_0$	Configuration initiale (avant déformation)
$C_t$	Configuration actuelle (après déformation)
$\Omega$	Domaine occupé par un solide en configuration $C_0$ et de frontière $\partial\Omega$
$\omega$	Domaine occupé par un solide en configuration $C_t$ et de frontière $\partial\omega$

## ◇ NOTATIONS TENSORIELLES

$C_0$	Configuration initiale (avant déformation)	$C_t$	Configuration actuelle (après déformation)
$a$	grandeur scalaire	$\otimes$	produit tensoriel des tenseurs d'ordre 2
$\vec{a}$	tenseur d'ordre 1	$\boxtimes$	$\vec{a} \boxtimes \vec{b} = a_{ik}b_{mj}e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$
$\bar{\bar{a}}$	tenseur d'ordre 2	$\cdot$	produit tensoriel contracté
$\bar{\bar{\bar{a}}}$	tenseur d'ordre 4	$:$	produit tensoriel doublement contracté
$\bar{\bar{1}}$	tenseur unité d'ordre 2	$\bar{\bar{a}}^T$	transposée tenseur d'ordre 2
$\bar{\bar{a}}^D$	partie déviatorique de $\bar{\bar{a}}$	$\det$	déterminant
$\bar{\bar{a}}^S$	partie sphérique de $\bar{\bar{a}}$	$\text{Cof}$	tenseur des cofacteurs
$(\bar{\bar{a}})_{sym}$	partie symétrique de $\bar{\bar{a}}$	$\text{tr}$	trace d'un tenseur d'ordre 2
$(\bar{\bar{a}})_{ant}$	partie anti-symétrique de $\bar{\bar{a}}$	$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\text{grad}_X$	gradient dans la configuration $C_0$	$\text{div}_X$	divergence dans la configuration $C_0$
$\text{grad}_x$	gradient dans la configuration $C_t$	$\text{div}_x$	divergence dans la configuration $C_t$



- produit contracté sur un nombre d'indice suffisant pour que le résultat soit un scalaire
- $\dot{a} = \frac{da}{dt}$  dérivée par rapport au temps d'une grandeur scalaire
- $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt}$  dérivée par rapport au temps d'un tenseur d'ordre 1
- $\dot{\bar{\bar{a}}} = \frac{d\bar{\bar{a}}}{dt}$  dérivée par rapport au temps d'un tenseur d'ordre 2

#### ◇ NOTATIONS CINÉMATIQUES

<u>Grandeurs géométriques</u>	<u>Mesures des déformations</u>
$S$ Surface limitant un domaine dans $C_0$	$\bar{\bar{B}}$ tenseur de CAUCHY-GREEN gauche
$\vec{N}$ normale à une surface $S$	$\bar{\bar{C}}$ tenseur de CAUCHY-GREEN droit
$s$ surface limitant un domaine dans $C_t$	$\bar{\bar{A}}$ tenseur des déformations d'EULER-ALMANSI
$\vec{n}$ normale à une surface $s$	$\bar{\bar{E}}$ tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE
$V$ Volume en configuration $C_0$	$\bar{\bar{\varepsilon}}$ tenseur linéarisé des petites déformations
$v$ Volume en configuration $C_t$	$\bar{\bar{V}}$ tenseur des déformations pures gauche
<u>Mesures des déplacements</u>	$\bar{\bar{U}}$ tenseur des déformations pures droit
$\vec{X}$ position initiale	$\bar{\bar{R}}$ tenseur rotation matérielle
$\vec{x}$ position actuelle	<u>Mesures des vitesses de déformations</u>
$\bar{\bar{F}}$ tenseur gradient de la transformation	$\bar{\bar{D}}$ tenseur des taux de déformation
<u>Mesures des vitesses</u>	$\bar{\bar{W}}$ tenseur des taux de rotation
$\vec{v}$ vitesse eulérienne	
$\bar{\bar{L}}$ tenseur gradient des vitesses eulériennes	

#### ◇ NOTATIONS STHÉNIQUES

<u>Mesures des efforts</u>	<u>Mesures des contraintes</u>
$\vec{T}$ effort exercé sur le domaine $\Omega$	$\bar{\bar{\sigma}}$ tenseur des contraintes de CAUCHY
$\vec{t}$ effort exercé sur le domaine $\omega$	$\bar{\bar{\pi}}$ tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHOFF 1
$\vec{\tau}$ densité d'efforts de cohésion dans $\omega$	$\bar{\bar{S}}$ tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHOFF 2

#### ◇ NOTATIONS THERMODYNAMIQUES

<u>Grandeurs énergétiques</u>
$\rho_0$ densité de masse volumique lagrangienne
$\rho$ densité de masse volumique eulérienne
$e$ densité d'énergie interne
$r$ densité de production interne de chaleur

$\vec{Q}$	perte surfacique de chaleur à travers $\partial\Omega$
$\vec{q}$	perte surfacique de chaleur à travers $\partial\omega$
$\psi$	densité d'énergie libre spécifique
$W$	potentiel thermodynamique

<u>Formalisme standard généralisé</u>		<u>Grandeurs entropiques</u>	
$\varphi$	pseudo-potentiel de dissipation	$\mathcal{S}$	entropie
$\varphi^*$	pseudo-potentiel dual de dissipation	$s$	densité d'entropie spécifique
<u>Fonctions d'état</u>		$T$	température
$\mathcal{A}_i$	variables internes dans $C_0$	$\Phi_0$	puissance dissipée dans $C_0$
$\alpha_i$	variables internes dans $C_t$	$\Phi$	puissance dissipée dans $C_t$
$\mathcal{W}_i$	forces thermodynamiques associées à $\mathcal{A}_i$		
$w_i$	forces thermodynamiques associées à $\alpha_i$		
<u>Etats intermédiaires</u>			
$C_i$	$i^{\text{ème}}$ configuration intermédiaire		
$\bar{\bar{F}}_e^i$	tenseur gradient de la transformation intermédiaire élastique de $C_i$ dans $C_t$		
${}^i\bar{\bar{F}}_a$	tenseur gradient de la transformation intermédiaire anélastique de $C_0$ dans $C_i$		
${}^i\bar{\bar{F}}^k$	tenseur gradient de la transformation intermédiaire de $C_i$ dans $C_k$		
$\bar{\bar{a}}_e^i$	toute grandeur cinématique basée sur $\bar{\bar{F}}_e^i$		
$\bar{\bar{a}}_a^i$	toute grandeur cinématique basée sur ${}^i\bar{\bar{F}}_a$		
${}^i\bar{\bar{a}}^k$	toute grandeur cinématique basée sur ${}^i\bar{\bar{F}}^k$		

◇ NOTATIONS EXPÉRIMENTALES ( $a = \varepsilon$  en traction uniaxiale et  $a = \gamma$  en double cisaillement)

<u>Paramètres des essais</u>		<u>Mesures complexes</u>	
$a$	déformation	$E^*$	module dynamique ( $G^*$ en cisaillement)
$f_r$	fréquence	$E'$	module de gain ( $G'$ en cisaillement)
$\omega$	pulsation ( $\omega = 2\pi f_r$ )	$E''$	module de perte ( $G''$ en cisaillement)
$a_{max}$	déformation maximale	$\delta$	angle de perte (déphasage)
$a_{min}$	déformation minimale	$\tan\delta$	facteur de perte
$a_d$	amplitude de déformation dynamique	<u>Grandeurs observables des essais</u>	
$a_s$	amplitude de déformation statique	$a_p$	déformation résiduelle
$\dot{a}$	taux de déformation (vitesse)	$\sigma_p$	contrainte résiduelle
$T$	température d'enceinte	$T_{rel}(t)$	Taux de relaxation à l'instant $t$
		$\Upsilon$	raideur global d'un cycle stabilisé
		$\Phi_{/cycle}$	dissipation globale d'un cycle stabilisé





---

# Introduction générale

L'utilisation sans cesse croissante des élastomères par les industries telles que l'aéronautique, l'automobile ou le bâtiment, provient de la richesse des propriétés que cette famille de polymères propose ; on notera par exemple leur grande déformabilité, leur caractère dissipatif et leur résistance à la fatigue...

D'une manière générale, ces matériaux ne sont pas dominés par un seul type de comportement mais par une combinaison mettant en jeu l'hyperélasticité, la plasticité, la viscosité et l'endommagement auxquels il est nécessaire d'associer une forte sensibilité aux conditions de chargement et de température.

Ainsi, pour permettre une maîtrise de la conception et de la fabrication de pièces élastomériques, la connaissance de ces comportements à l'échelle locale s'avère indispensable à la bonne prévision de la réponse, de la limite de résistance et de la durée de vie.

Ce travail de recherche est le fruit d'une collaboration étroite entre la société EUROCOPTER, l'École Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (ESIM) et le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA). Il traite de la modélisation et la caractérisation en grandes déformations d'un élastomère siliconé chargé de silice (VHDS 1029) produit par la société PAULSTRA et utilisé depuis les années soixante-dix, dans la fabrication de pièces élastomériques amortissantes employées dans le mécanisme de liaison du moyeu rotor avec les pales d'un hélicoptère.

Les conditions d'utilisation de ces pièces se révèlent souvent très sévères compte tenu des conditions thermiques et de chargement (statiques et dynamiques) auxquelles elles sont soumises. L'objectif est alors de cerner finement le comportement de ces matériaux à travers :

- le développement d'un modèle de comportement adapté au matériau et à son domaine

d'utilisation ;

- l'identification des paramètres gouvernant le modèle à travers la réalisation d'essais de caractérisation à différentes températures ;
- une validation via la confrontation avec des essais sous sollicitations combinées (cyclique multi-harmoniques ou avec préchargement statique).

De manière plus précise, ce mémoire de thèse s'articule autour des points suivants :

- Le CHAPITRE I constitue une introduction générale de la famille des matériaux élastomères. Du caoutchouc naturel aux matériaux synthétiques, nous présentons d'une part leurs structures macromoléculaires désordonnées qui leur confèrent des propriétés physiques et mécaniques variées et d'autre part, les diverses charges qui peuvent leur être incorporées pour les renforcer. On donnera alors quelques exemples de phénomènes induits par ces adjonctions tels que les effets MULLINS et PAYNE.
- Le II<sup>ème</sup> CHAPITRE précise le contexte industriel de l'étude. Dans la conception des adaptateurs de fréquence, pièces élastomériques permettant un décalage des fréquences propres de la pale par rapport à celles de rotation du rotor, la société EUROCOPTER fait appel à la société PAULSTRA pour produire un élastomère à forte capacité d'amortissement et bonne stabilité thermique : l'élastomère silicone VHDS 1029. On énoncera alors la problématique industrielle qui nous permettra de définir le cadre mécanique de nos développements.
- Une caractérisation expérimentale du matériau est proposée au CHAPITRE III. Elle a été réalisée à partir d'essais de traction uniaxiale et de double cisaillement réalisés respectivement au laboratoire d'essais mécaniques de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (ESIM) et au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille. Des sollicitations de plusieurs types ont été réalisées (monotone, relaxation, cyclique...) en faisant varier l'amplitude de chargement, la vitesse de sollicitation et la température d'essai. L'analyse des résultats nous a alors permis de mettre en évidence un comportement élasto-dissipatif non-linéaire dépassant le cadre classique des petites déformations et fortement sensible à une variation des paramètres d'essais.
- Le CHAPITRE IV traite une propriété importante des élastomères *i.e.* leur grande déformabilité. Cette capacité, entraînant de fortes non-linéarités de la réponse en contrainte-déformation, nous contraint à prendre en compte un comportement de type hyperélastique. Nous proposons ainsi une description des lois de comportement en introduisant une densité d'énergie de déformation. On présente alors une liste non exhaustive de modèles hyperélastiques dont certains seront confrontés dans une campagne d'identification des paramètres menée sur le matériau. L'introduction de notions de stabilité matérielle permet alors de mettre en évidence la nécessité de prendre certaines précautions avant d'entamer une telle campagne.
- Au CHAPITRE V, nous exposons une première approche du comportement dissipatif. Préala-

blement, on va survoler l'état de l'art des modèles reflétant ce caractère amortissant à travers trois orientations (qui peuvent être combinées). En premier lieu, on s'intéresse à la dépendance de la contrainte en fonction de l'histoire du chargement qui relève d'un comportement viscoélastique. Ensuite, on considère la dissipation comme non-visqueuse en introduisant le comportement élastoplastique. Enfin, on discute autour des phénomènes d'endommagement qui malgré leur importance en terme de fatigue dynamique ne seront pas pris en compte dans ce travail. Ensuite, nous proposons une modélisation phénoménologique des comportements en généralisant les modèles rhéologiques aux grandes déformations via l'introduction de la notion de configurations intermédiaires. Ainsi, en associant l'hyperélasticité à la viscoélasticité ou à l'élastoplasticité pour des transformations isothermes, on enrichit nos modèles respectivement d'une bonne représentativité de l'influence de la vitesse ou de l'amplitude de chargement. Quelque soit l'orientation envisagée, nous constatons alors qu'une augmentation du nombre de branches des modèles permet une corrélation plus fine avec l'expérience.

- Enfin dans le CHAPITRE VI, nous proposons une approche statistique d'un modèle multi-branché hyper-viscoélastique généralisé aux grandes déformations permettant de couvrir un large spectre de fréquences de sollicitations. Il présente alors l'avantage d'un modèle multi-branches, mais avec un nombre de paramètres caractéristiques nettement moins important à identifier. Cependant, à ce stade du développement, le modèle est incapable de rendre compte du phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude dynamique constaté expérimentalement. Pour remédier à cela, nous proposons d'enrichir le modèle par une branche élastoplastique qui nécessite alors l'élaboration d'une stratégie d'identification des coefficients matériaux. Une confrontation modèle/expérience via des sollicitations cycliques multi-harmoniques ou avec préchargement statique permet alors de valider le modèle ainsi identifié à température ambiante. Une campagne d'identification à différentes températures a permis ensuite de mettre en évidence des lois d'évolution des paramètres du modèle en fonction de la température.



---

# Généralités sur les élastomères

**L'**histoire des caoutchoucs, qu'ils soient naturels ou synthétiques, se compose d'aventures scientifiques, industrielles et commerciales multiples. Des premières études au début du XVIII<sup>ème</sup> siècle à nos jours, de nombreux scientifiques ont fait de cette famille de matériaux leur principal objet d'étude tant la richesse de leur comportement est importante.

Ce chapitre constitue une introduction générale à notre étude. Après un bref historique qui nous amène du caoutchouc naturel aux élastomères synthétiques, on présente succinctement leurs multiples compositions chimiques, leurs structures macromoléculaires désordonnées, les adjonctions qui leurs sont incorporées. . . toutes ces observations qui leur confèrent des propriétés aussi nombreuses que variées.



## PLAN DU CHAPITRE I

---

<b>I.1</b>	<b>Du caoutchouc, vers les matériaux synthétiques . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>I.2</b>	<b>Structure macromoléculaire . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>I.3</b>	<b>Etat de la matière des polymères amorphes . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>I.4</b>	<b>Elasticité caoutchoutique : une grande déformabilité . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>I.5</b>	<b>Les élastomères chargés . . . . .</b>	<b>14</b>
I.5.1	Renforcement des propriétés d'usage . . . . .	14
I.5.2	Autres effets sous chargement cyclique . . . . .	16
<b>I.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>20</b>

---

## I.1 Du caoutchouc, vers les matériaux synthétiques

Quelle que soit la nature des matériaux qui composent la famille des élastomères, du caoutchouc naturel aux matériaux synthétiques, leurs diverses propriétés ont suscité l'engouement des hommes à travers les siècles derniers.

Dès le XV<sup>ième</sup> siècle, les européens ont pu observer les populations indiennes d'Amérique centrale et d'Amérique du Sud utilisant le latex issu de différentes plantes telles que l'hévéa ou le gayule dans la fabrication de balles. Il a fallu attendre un peu plus de deux siècles (1736) pour voir un naturaliste français Charles Marie DE LA CONDAMINE réaliser les premières études scientifiques de cette substance opaque en Guyane. Le terme de caoutchouc est alors repris de l'expression indienne, "caa-o-chu" ou "ca-hu-chu" signifiant "bois qui pleure". Dès lors, il fut à l'origine de nombreuses inventions telles que les gommes à effacer (1770), les imperméables (1823), les bretelles (1834)... Mais l'une des problématiques d'utilisation de ce matériau est de fondre en une masse malodorante sous une chaleur torride et de casser par temps froid.

Or une centaine d'années après l'exportation du caoutchouc en Europe, une prodigieuse avancée technologique fut réalisée : la découverte accidentelle de la vulcanisation. En 1839, l'américain C. GOODYEAR (*cf.* FIG. I.1) permit de montrer qu'une cuisson du caoutchouc en présence de soufre supprimait les propriétés indésirables de la gomme. Ce caoutchouc alors vulcanisé a une solidité et une élasticité accrues, ainsi qu'une plus grande résistance aux changements de température.

Jusqu'au début du XX<sup>ième</sup> siècle, le développement des industries automobile et aéronautique contribua à l'explosion de la demande de caoutchouc naturel. Ce matériau connût alors une vague de prospérité qui dura jusqu'au début des années quarante et les premières synthèses de caoutchouc synthétique furent mises au point mais leur production restait encore trop onéreuse. Pendant la seconde guerre mondiale, les alliés investirent plus d'un milliard d'euros dans la recherche et le développement du caoutchouc synthétique pour pallier au manque d'approvisionnement de l'Extrême-Orient en caoutchouc naturel (en 1876, la culture de l'hévéa fut transplantée en Asie pour des raisons économiques).

Aujourd'hui, il existe donc deux types de caoutchouc aux origines différentes, l'un provenant de l'hévéaculture (le naturel) et l'autre de l'industrie chimique (le synthétique). Ils sont à la fois en

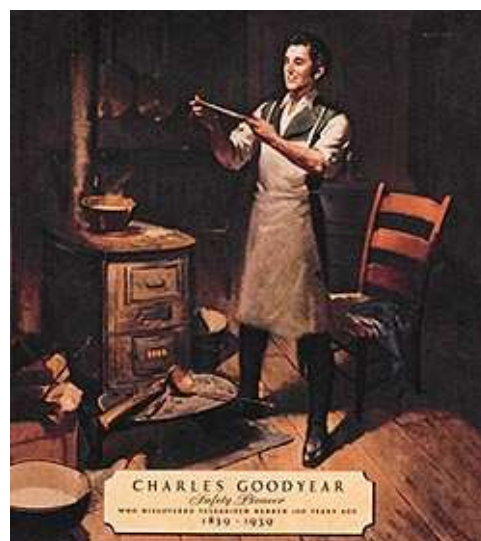


FIGURE I.1 – *Charles* GOODYEAR, 1839

concurrence et de plus en plus complémentaires. Il s'agit de deux familles possédant à la fois des propriétés différentes mais aussi des caractéristiques communes. Sur ce dernier point, le choix s'effectue généralement suivant des raisons économiques.

Le TABLEAU I.1 présente quelques uns des moments les plus importants dans l'histoire du caoutchouc.

Dates	
1736-1744	Premières études sur le caoutchouc (C.M. DE LA CONDAMINE et F. FRESNEAU, France).
1770	Gommes à effacer (J. PRIESTLEY, Angleterre)
1820	Augmentation de la plasticité du caoutchouc suite à sa "mastication" et donc possibilité de mise en forme. Renforcement du caoutchouc par la silice (T. HANCOCK, Angleterre)
1823	Imperméabilisation des tissus par dissolution du caoutchouc dans un solvant ; fabrication des premiers imperméables (C. MACINTOSH, Ecosse)
1839	Découverte de la vulcanisation (C. GOODYEAR, Etats Unis)
1876	Transplantation de l'hévéa brasiliensis en Asie à Ceylan
1879	Caoutchouc synthétique (G. BOUCHADART, France)
1888	Pneumatiques pour vélo (J.B. DUNLOP, Ecosse)
1889-1892	Pneumatiques démontables pour vélo et auto (A. et E. MICHELIN, France)
1909	Premier brevet pour la fabrication de caoutchouc synthétique (F. HOFFMANN, Allemagne)
1923-1929	Caoutchouc synthétique polybutadiène <i>Buna</i> <sup>®</sup> (W. BOCK et E. TSCHUNKUR, Allemagne)
1928-1930	Caoutchouc synthétique néoprène (J.A. NIEUWLAND et W.H. CAROTHERS, Etats Unis)
1937	Caoutchouc synthétique thermoplastique, le polyuréthane thermoplastique (PU) (O. BAYER et al., Allemagne)
1940-1942	Caoutchouc synthétique silicone
1946	Pneu radial (MICHELIN, France)
1958	Caoutchouc synthétique fluoré, <i>Viton</i> <sup>®</sup> (DUPONT Elastomers, Etats Unis)
1958-63	Caoutchouc synthétique d'éthylène –EPM– propylène –EPDM– (G. NATTA, Italie)
1970	Premier amortisseur élastomérique sur l'hélicoptère Gazelle. FIG. II.10(a) (EURO-COPTER, France)

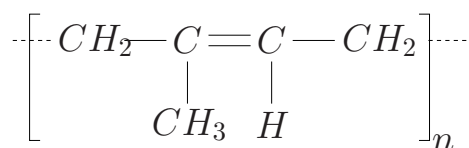
TABLEAU I.1 – Quelques dates dans l'histoire du caoutchouc

## I.2 Structure macromoléculaire

Avant d'entrer dans des considérations purement mécaniques, nous exposerons brièvement le contexte structural de la composition des caoutchoucs.

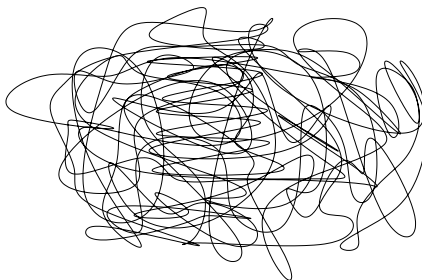
M. FARADAY a montré en 1826 que la composition du caoutchouc naturel brut (*i.e.* non-vulcanisé) est un hydrocarbure,  $(C_5H_8)_n$ . En 1860 un autre chimiste britannique G. WILLIAMS

a extrait un monomère de la distillation du caoutchouc naturel vulcanisé auquel il donna le nom d'"isoprène" (*cf.* FIG. I.2).

FIGURE I.2 – *Isoprène*,  $\text{C}_5\text{H}_8$ 

Il fallut alors dix-neuf ans, pour qu'un chimiste français, G. BOUCHARDAT réussisse à synthétiser l'isoprène en laboratoire. De nombreux efforts furent alors réalisés pendant les cinquante années qui suivirent pour synthétiser du caoutchouc à partir de cette molécule et le premier brevet de fabrication d'un véritable caoutchouc artificiel fut déposé par un chimiste allemand F. HOFMANN en 1909.

Hormis le caoutchouc naturel, les élastomères sont obtenus suite à une polymérisation par polyaddition<sup>(1)</sup> qui permet de mettre en séquence des monomères. L'assemblage des molécules qui constituent alors l'élastomère est totalement désordonné et isotrope. Ces matériaux appartiennent donc à la famille des polymères amorphes, c'est à dire qu'ils possèdent un arrangement irrégulier et aléatoire des chaînes. Les élastomères sont donc constitués d'un ensemble de chaînes macromoléculaires, plus ou moins réticulées (*cf.* § I.4), de différentes longueurs, chacune étant au repos repliée sur elle-même. L'architecture peut alors être représentée par une "pelote statistique".

FIGURE I.3 – *Architecture sous forme de "pelote statistique"*


---

(1). Au cours d'une réaction de polyaddition, de nombreuses petites molécules d'un seul type A, appelées monomères, se lient les unes aux autres un très grand nombre de fois pour donner des molécules géantes appelées macromolécules ou polymères, de structure ...-A-A-A-A-A-... ou -(A)<sub>n</sub>, où A est le motif du monomère qui se répète un très grand nombre de fois, *n* est le degré de polymérisation qui dépend des conditions opératoires (température, pression, présence et nature de catalyseurs...) et qui est de l'ordre du millier.

Depuis la découverte de l'isoprène, d'autres monomères furent également expérimentés et la co-polymérisation, *i.e.* polymérisation de plusieurs monomères différents (co-monomères), fut également employée (SBR, EPDM, Butyle...). Dès lors, l'association d'atomes autres que le carbone et l'hydrogène tels que le chlore, l'azote, l'oxygène ou le fluor, à nos élastomères leur confère des propriétés particulières qui permet de les classer suivant leur utilisation industrielle en trois grandes catégories (*cf.* TAB. I.2) :

- les élastomères pour usages généraux tels que les préservatifs, les pneumatiques et les semelles,
- ceux pour usages spéciaux comme le vernis et les plots antivibratoires,
- ceux pour usages très spéciaux ; les adaptateurs par exemple.

Type d'utilisation	Nom usuel	Sigle	Nature de l'élastomère	Propriétés les plus remarquables
Usages généraux	Caoutchouc naturel	NR	Polymère de l'isoprène	Bonnes propriétés mécaniques
	SBR	SBR	Copolymère de butadiène et de styrène	
	Polyisoprène de synthèse	IR	Polymère de l'isoprène	
	Polybutadiène	BR	Polymère de butadiène	Très bonne résistance à l'abrasion
Usages spéciaux	EPDM	EPDM	terpolymère de l'éthylène, du propylène et d'un termonomère (diène)	Excellente résistance au vieillissement
	Butyle	IIR	Copolymère d'isobutylène et d'isoprène	Très bonne résistance au vieillissement et étanchéité aux gaz
	Néoprène ou polychloroprène	CR	Polymère de chloroprène	Bonne résistance au vieillissement et aux huiles
	Nitrile	NBR	Copolymère de butadiène et de nitrile acrylique	Très bonne résistance aux hydrocarbures et faible perméabilité aux gaz
Usages très spéciaux	Thiokol	T	Polymère de sulfure d'éthylène	Excellente résistance à certaines huiles
	Hypalon	CSM	Polyéthylène chlorosulfoné	Remarquable tenue à l'ozone
	Polyuréthanes	EU	Polymère complexe	Très bonne résistance aux huiles et à la dégradation. Hautes performances mécaniques
	Silicone	Q/MQ	Polymère complexe dont le squelette est composé de silicium et d'oxygène	Haute résistance à la chaleur et au froid
	Elastomère fluoré	FM	Copolymère fluoré	Exceptionnelle résistance à la chaleur et aux huiles

TABLEAU I.2 – Catégories d'élastomères

### I.3 Etat de la matière des polymères amorphes

Les élastomères appartiennent à la famille des polymères amorphes (*cf.* § I.2). Ils présentent donc en général un état caoutchoutique à la température ambiante bien au-dessus de leur température de transition vitreuse notée  $T_g$ . On caractérise cette température en observant l'évolution des grandeurs caractéristiques (module dynamique  $E^*$  et angle de perte  $\delta$  définis en ANNEXE C.2) décrivant les propriétés dissipatives d'un matériau suivant la température.

En 1962, les études de BUECHE et NIELSEN sur ces hauts-polymères (ou thermodurcissables) ont permis de mettre en évidence quatre états de la matière :

- **Etat vitreux** : cet état caractérise généralement les verres organiques qui présentent une très faible déformabilité.
- **Etat de transition** : à ce stade, on est en présence de polymères linéaires thermoplastiques de type celluloses, polyamides, polyesters, polyvinyles... Il s'agit comme son nom l'indique d'une phase de transition significative de l'état quasi-fragile à un état de grande déformabilité.
- **Etat caoutchoutique** : les élastomères sont caractéristiques de cet état. Ils possèdent une grande déformabilité et un comportement visqueux.
- **Etat d'écoulement** : le polymère, bien qu'encore solide, se comporte comme un fluide non-newtonien quasi-incompressible fortement visqueux.

On peut ainsi réaliser une observation qualitative du module dynamique et de l'angle de perte suivant la température qui permettent de mettre en évidence les différents états de déformabilité que peut engendrer une variation de température sur ces matériaux (*cf.* FIG. I.4).

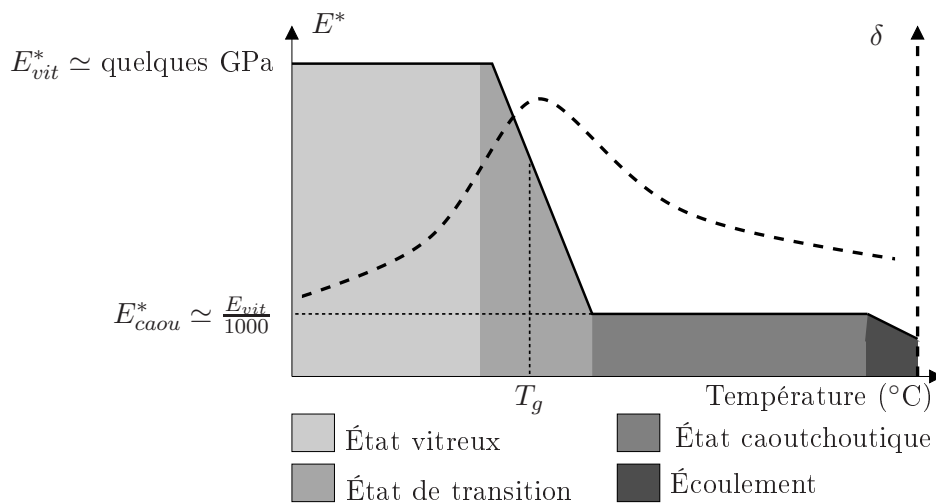


FIGURE I.4 – Evolution du module dynamique et de l'angle de perte en fonction de la température.

## I.4 Elasticité caoutchoutique : une grande déformabilité

L'élasticité caoutchoutique caractérisant l'état de la matière des élastomères est moins due à la nature des atomes qu'à l'arrangement moléculaire. Les élastomères ne sont pas les seuls matériaux élastiques mais ils sont les seuls à offrir une telle capacité de déformation. Ainsi un ressort d'acier n'accepte guère de subir un allongement de plus de 10%. En revanche, les caoutchoucs peuvent s'allonger couramment jusqu'à 500% et dans certains cas jusqu'à 1000%. Il est alors possible d'expliquer ce phénomène par leur structure macromoléculaire.

Le caoutchouc à l'état brut est comparable à un fluide visqueux. Sa structure est comparable aux polymères linéaires (*cf.* FIG. I.5) dont les chaînes macromoléculaires sont indépendantes.

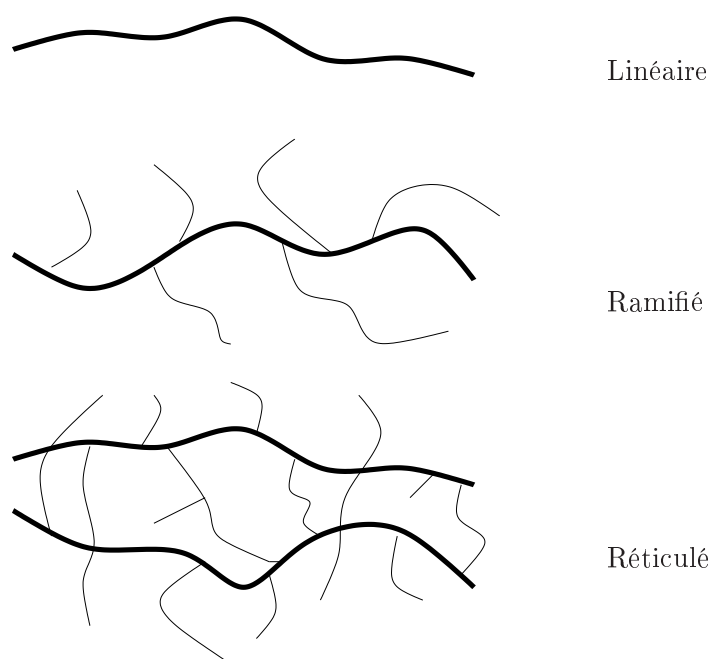


FIGURE I.5 – *Différents types de macromolécules*

Sous l'action d'une contrainte extérieure, on peut aisément imaginer que ces chaînes glissent irréversiblement les unes par rapport aux autres. Ces libertés de déplacement leur permettent donc de subir de grandes déformations sans rupture. Mais lorsqu'on libère le matériau de cette contrainte, il flue et une déformation permanente apparaît. Le retour à l'état initial ne peut alors s'effectuer que par une intervention extérieure. En 1820, c'est T. HANCOCK qui mit en évidence l'augmentation de la plasticité du caoutchouc brut suite à sa "mastication". Un comportement qui lui confère alors une capacité de mise en forme. Cependant, il subsistait un manque de stabilité thermique qui freinait son utilisation (*cf.* § I.1).

On crée donc des liens entre les chaînes pour établir voire augmenter une capacité de recouvrement élastique afin que le caractère visqueux laisse place à l'élasticité. Les pontages chimiques

entre celles-ci forment un réseau tridimensionnel qui solidarise les chaînes entre elles. Le matériau possède alors une bonne stabilité thermique tout en conservant le caractère d'extrême déformabilité. On appelle ce type de réaction la réticulation<sup>(2)</sup> (cf. FIG. I.5). Le paramètre qui caractérise ce type de réaction est le taux de réticulation (ou densité de réticulation).

On peut ainsi expliquer l'origine de la grande déformabilité des caoutchoucs par une densité de réticulation relativement faible. Cependant d'autres propriétés dépendent souvent de manière non-linéaire du taux de réticulation (cf. FIG. I.6) telles que la résistance au déchirement et à la fatigue, le comportement dissipatif, la dureté, la résistance dynamique, le module statique et le module dynamique.

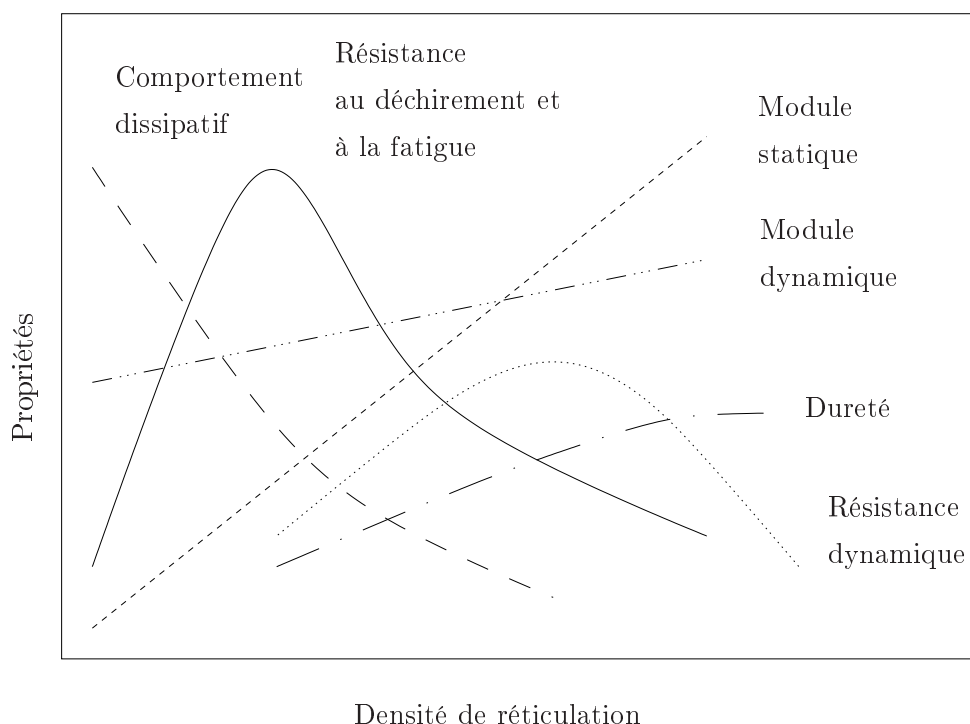


FIGURE I.6 – Représentation schématisée des propriétés physiques et mécaniques fonction de la densité de réticulation de BOUCHEREAU

(2). La réticulation est une opération de pontage. Il faut noter le cas particulier de la vulcanisation qui s'effectue avec du soufre à haute température.



## I.5 Les élastomères chargés

Les propriétés d'un élastomère dépendent de sa composition (*cf.* § I.2), de sa réticulation (*cf.* § I.3) mais elles évoluent aussi en grande partie suivant les adjonctions qui lui sont incorporées. De manière générale, l'utilisation des charges a pour objectif de renforcer le matériau ou bien d'en diminuer le prix.

### I.5.1 Renforcement des propriétés d'usage

T.HANCOCK réalisa en 1820 le premier renforcement par des charges de silice avec une volonté de diminuer le prix de revient du caoutchouc naturel. Mais l'utilisation des élastomères chargés (en noir de carbone) a réellement débuté au début du XX<sup>ième</sup> siècle avec l'essor des pneumatiques. Quant aux charges de silice, il aura fallu attendre les années quarante pour qu'on les utilise précisément comme renfort.

On entend alors par renforcement, l'amélioration des propriétés d'usage de la gomme. Il peut s'agir de l'augmentation du module tangent à l'origine, des modules sécants, de l'énergie à rupture, de la contrainte ou de l'élongation à rupture, de la résistance à la fatigue, de la résistance à l'abrasion ... (DANNENBERG, 1975). De manière générale, le caractère renforçant varie avec la nature de la charge, sa taille, sa morphologie mais aussi ses interactions avec la matrice. On parle alors de matériaux bi-phasés composés de :

- la matrice (ou la gomme),
- les charges (ou les agglomérats ou encore les renforts).

Il existe plusieurs types de charges plus ou moins renforçantes (*cf.* TAB. I.3). Par exemple les charges claires qui sont moins renforçantes que les noirs de carbone, sont utilisées dans la fabrication de mélange clair afin de baisser les coûts de production.

Noirs de carbone		Charges claires	
N347/N375/N330	+++	silices	++
N550	++	kaolins	+
N762	+	talcs et craies	–

+++	bon
++	moyen
+	faible
–	inerte

TAB. I.3 – Degré de renforcement de différents types de charges [LEMOINE, 2001]

Le mélange des charges à la matrice n'est jamais parfait. Il reste des "grumeaux" ou "agglomérats" (*cf.* FIG. I.7). Les charges se présentent donc sous différentes échelles, de la taille d'une particule élémentaire à l'agrégat (ensemble indivisible) jusqu'aux agglomérats (ensemble destructible en agrégat). Afin de comprendre les mécanismes de renforcement du SBR par la silice, RAMIER *et al.* [2002] réalise une observation des différentes tailles de charge de silice pour mettre

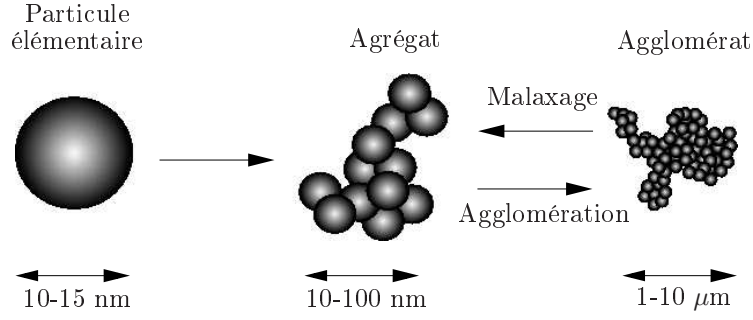


FIGURE I.7 – Les différentes échelles de taille des charges

en évidence la nature des interactions à l'interface charge/matrice en fonction du traitement de surface de la charge et de leur influence sur les propriétés mécaniques.

De la même manière que pour une réaction de réticulation, il s'avère nécessaire de définir un paramètre qui caractérise l'adjonction de charges à un matériau. On parlera alors de la quantité de charge notée  $\mu_m$  qui s'exprime en partie massique de charge ajoutée pour 100 parties de gomme. Via l'expression de cette quantité, il est alors possible d'exprimer la fraction volumique de charge du matériau notée  $\mu$ <sup>(3)</sup>.

A la vue des résultats de DEWIMILLE et BOKOBZA [2002] présentant l'évolution de la contrainte nominale avec la déformation pour différents échantillons d'un élastomère silicone renforcé par différents taux de charge de silice, on observe bel et bien un raidissement de la contrainte nominale suivant le taux de charge du matériau (*cf.* FIG. I.8(a)).

Ainsi les principales théories de renforcement des élastomères chargés font appel à ce type de paramètre. Par exemple, en considérant la particule comme un solide rigide, indéformable et adhérent, la littérature propose divers modèles pour représenter l'augmentation du module d'élasticité en fonction de la valeur du module élastique du matériau non-chargé, de la fraction volumique de charge, du facteur de forme des charges... CANTOURNET [2002] présente les principaux modèles de renforcements utilisés tels que ceux de SMALLWOOD ou de GUTH.

Or pour un industriel, l'accroissement de la raideur n'est que l'une des principales caractéristiques dues à l'adjonction de charges : on peut aussi observer l'augmentation de la dissipation au cours de sollicitations dynamiques.

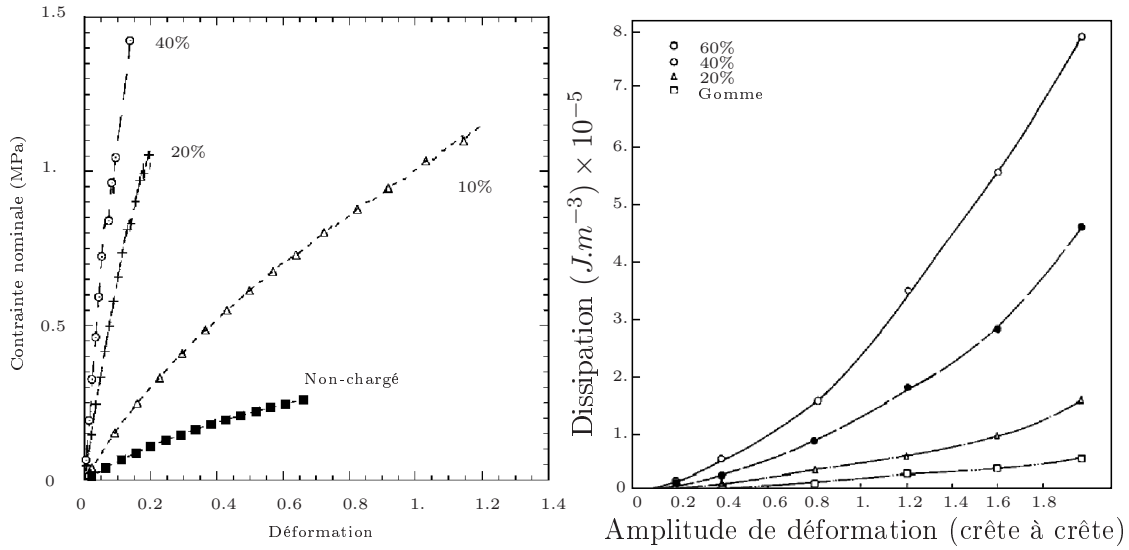
KAR et BHOWMICK [1999] proposent une observation de l'évolution de la dissipation globale mesurée à un taux de déformation de  $0.019s^{-1}$  suivant l'amplitude crête à crête d'un essai

---

(3). CANTOURNET [2002] exprime la relation entre la quantité de charge et le fraction volumique de charge :

$$\mu = \frac{\mu_m / \rho_{charge}}{m_{vul} / \rho_{vul} + \mu_m / \rho_{charge}} \quad (I.1)$$

où  $\rho_{charge}$ ,  $\rho_{vul}$  et  $m_{vul}$  respectivement la densité volumique de la charge, la densité volumique de l'élastomère vulcanisé et la masse totale de vulcanisation pour 100g d'élastomère.



(a) Courbe contrainte nominale/déformation pour (b) Effet de l'amplitude de déformation (crête à crête) à différents échantillons d'un élastomère silicone (Dimethyl-(Poly)Siloxane) renforcé par la silice précipitée *in situ* [DEWIMILLE et BOKOBZA, 2002] de 0.019  $s^{-1}$  pour un élastomère SBR suivant différents taux de charge de noir de carbone [KAR et BHOWMICK, 1999].

FIGURE I.8 – Observation du caractère renforçant des charges.

cyclique triangulaire pour différents échantillons d'un élastomère SBR à divers taux de charge de noirs de carbone (*cf.* FIG. I.8(b)).

Pour confirmer ces observations, nous proposons les résultats d'une campagne d'essais expérimentaux sur des éprouvettes de quadruple cisaillement d'élastomères siliconés fournies par la société SMAC que nous avons réalisée au sein du laboratoire d'essais mécaniques de l'ESIM. La comparaison s'effectue alors sur un mélange siliconé CQXB (Dureté Shore 30) et son homologue avec 10% de charges ajoutées de Dureté Shore 50<sup>(4)</sup>. Pour l'analyse de ces résultats nous nous sommes basés sur le module dynamique (ou raideur globale) et sur la dissipation globale au cours d'un cycle stabilisé calculés pour une sollicitation cyclique triangulaire avec une amplitude de 50% et une vitesse de déformation de  $0.15 s^{-1}$  (*cf.* § III.3.2). L'examen de ces deux paramètres permet alors d'observer que le mélange silicone chargé est plus dissipatif et plus rigide que son homologue non-chargé (*cf.* FIG. I.9 et TAB. I.4).

### I.5.2 Autres effets sous chargement cyclique

On a pu constater que l'adjonction de charges permet un renforcement des propriétés de la gomme. Or on peut noter divers phénomènes ou effets qui s'accroissent voire qui apparaissent au

(4). Il faut noter que le fabricant nous a communiqué ni le type de mélange siliconé, ni le type de charges ajoutées.

	CQXB	CQXB-Chargé
Module dynamique, (MPa)	0.270	0.368
Dissipation globale, ( $\text{kJ.m}^{-3}$ )	17	73

TABLEAU I.4 – Comparaison du module dynamique et de la dissipation globale pour des caoutchoucs silicones CQXB avec et sans charge produits par la société SMAC et calculés pour un essai cyclique triangulaire d'amplitude 50% et de vitesse de déformation  $0.15\text{s}^{-1}$ .

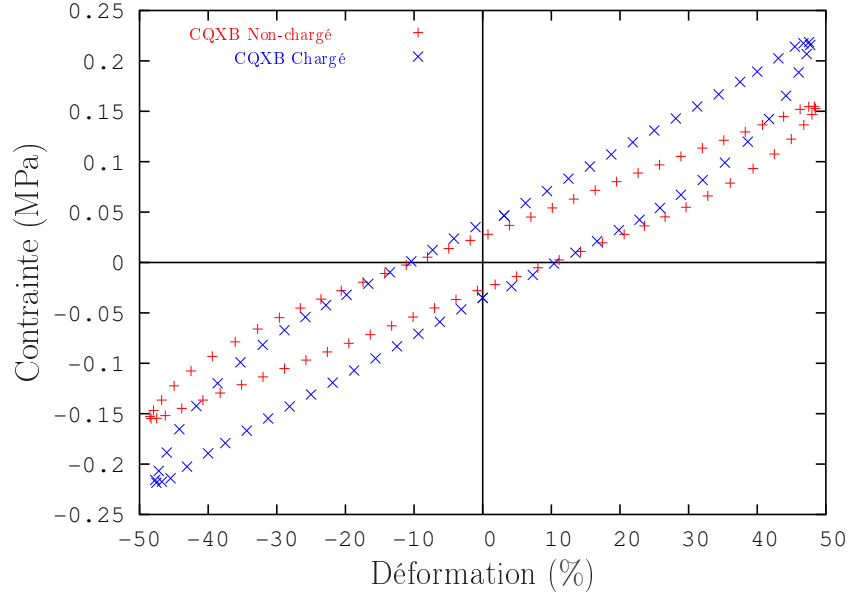


FIGURE I.9 – Evolution de la réponse en cisaillement suivant le matériau pour un essai cyclique triangulaire d'amplitude 50% et de vitesse de déformation  $0.15\text{s}^{-1}$ .

cours d'un chargement répété :

- **Phénomène de stabilisation** (1931) : HOT a mis en évidence la nécessité d'appliquer un certain nombre de cycles à une éprouvette afin de pouvoir enregistrer une courbe de comportement unique à un niveau donné de déformation. On parle dans ce cas de cycle stabilisé.
- **Effet MULLINS** (1947) : Lorsqu'un élastomère est sollicité de façon cyclique, une diminution de la charge nécessaire pour obtenir la même elongation est observée. Ce phénomène plus ou moins réversible de diminution des propriétés mécaniques d'un matériau sous chargement cyclique connu sous le nom d'adoucissement sous contrainte ou d'effet MULLINS, a été l'objet de nombreuses recherches [GOVINDJEE et SIMO, 1991 ; MIEHE, 1995 ; MOREAU, 2000].  
MULLINS [1947] a réalisé plusieurs campagnes expérimentales sous chargement répété de différents mélanges afin de mieux comprendre ce phénomène. Il en ressort les constats

suivant :

- tous les élastomères utilisés présentent un phénomène d'adoucissement d'autant plus important que le taux de charge est élevé,
- la contrainte pour une élongation donnée lors du premier cycle diminue pour les déformations inférieures ou égales à la déformation maximale imposée lors du premier cycle,
- lorsque la déformation est supérieure aux cycles précédents, le matériau n'est pas adouci,
- le plus grand pourcentage d'adoucissement est obtenu lors du premier cycle avec une stabilisation du comportement au bout d'un certain nombre de cycles suivant les élongations imposées. Plus l'élongation sera grande, plus le nombre de cycles permettant la stabilisation du matériau est important.

A ce phénomène d'adoucissement s'ajoute aussi une modification de la trajectoire de la montée en charge jusqu'à la déformation maximale après chargement cyclique. GOVINDJEE et SIMO [1991] mettent en évidence ce phénomène par un chargement cyclique (*cf.* FIG. I.10).

Partant d'un état initial ①, considéré comme vierge de sollicitations, la courbe de premier chargement suit le chemin (a). Si l'on décharge le matériau arrivé à l'état ②, la courbe de premier déchargement est le chemin (b). Si un deuxième chargement est ensuite appliqué, le chemin suivi sera alors (c) jusqu'à atteindre l'état ②, puis la courbe de chargement se

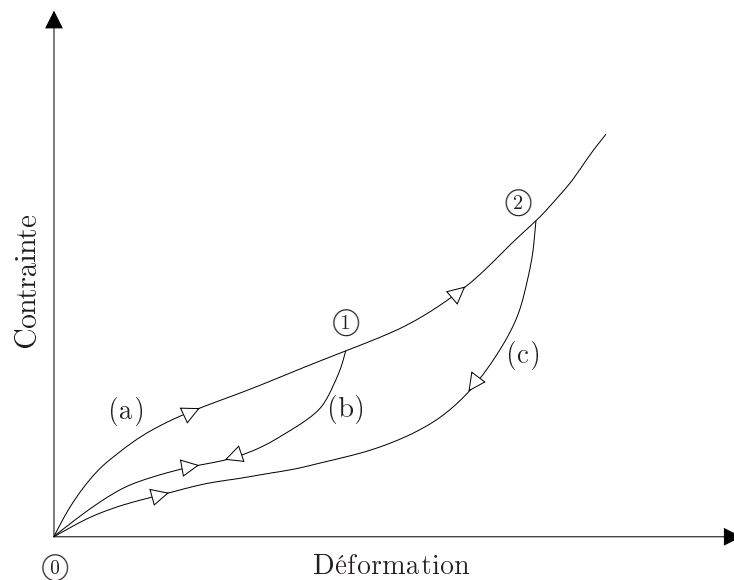


FIGURE I.10 – *Modification de la trajectoire d'une courbe "virtuelle" de montée en charge après chargement cyclique d'un élastomère [GOVINDJEE et SIMO, 1991].*

confond à nouveau avec le chemin (a). Si l'on décharge le matériau une fois arrivé à un état ② ( $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ ), la décharge suit (c). En cas de nouveau chargement, le chemin est (c) tant que  $\varepsilon \leq \varepsilon_2$  et redevient (a) par la suite.

- **Phénomène de recouvrement** (1947) : MULLINS [1947] mit en avant pour la première fois le pourcentage de récupération pour un caoutchouc naturel vulcanisé en fonction de la température (*cf.* FIG. I.11). Après un certain temps, le matériau préalablement cyclé présente à nouveau un effet MULLINS. Le fait de chauffer le matériau permet une récupération plus rapide et plus importante.
- **Effet PAYNE** (1971) : Lors d'une sollicitation cyclique en petites déformations d'un élastomère chargé, l'augmentation de l'amplitude de déformation s'accompagne d'une réduction du module dynamique. PAYNE observe de plus une forte non-linéarité dans son évolution. CANTOURNET [2002] propose par exemple d'imputer cet effet au phénomène de dislocation/désagglomération des charges. Il s'agit donc de glissement de chaînes autour des agrégats et la gomme n'est toujours pas sollicitée. On peut illustrer cet effet au regard de la FIGURE I.12. En effet, SJÖBERG [2002] constate un net assouplissement suivant l'amplitude de sollicitation. Ce phénomène s'accompagne d'une forte hausse de l'angle de perte suivant l'amplitude jusqu'à un certain seuil à partir duquel on observe une diminution. Il est alors intéressant de mettre en évidence le caractère non-linéaire de leur évolution.

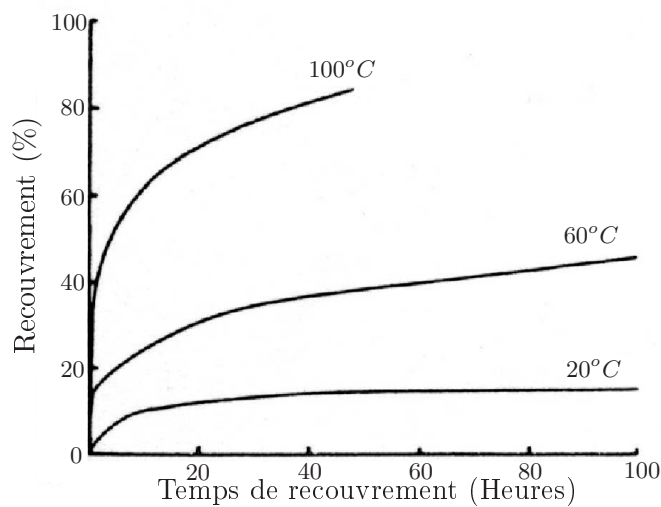


FIGURE I.11 – Pourcentage de recouvrement de l'effet MULLINS pour un caoutchouc naturel vulcanisé en fonction de la température et du temps [MULLINS, 1947]

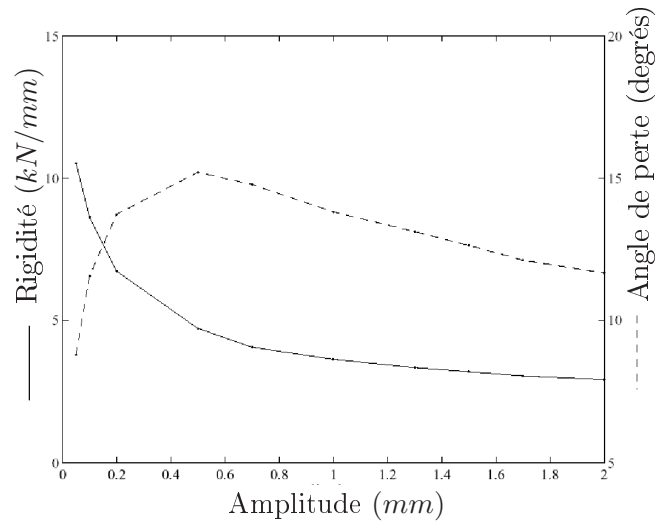


FIGURE I.12 – *Mesures de la rigidité et de l'angle de perte d'un élastomère chargé (isolant) montrant une forte dépendance à une variation d'amplitude, appelé effet PAYNE [SJÖBERG, 2002].*

## I.6 Conclusion

Ce chapitre propose quelques généralités sur la famille des caoutchoucs qu'ils soient naturels ou synthétiques. Ainsi, on a pu constater que l'association :

- de leurs diverses compositions chimiques,
- de leurs structures macromoléculaires désordonnées,
- des types d'adjonctions qui leurs sont incorporées...

leur confèrent des propriétés aussi nombreuses que variées. Il paraît alors illusoire de chercher à caractériser un comportement global pour tous les élastomères. L'étude se limitera donc aux élastomères silicones faiblement chargés utilisés par notre partenaire industriel.

## Contexte industriel

**L**a structure macromoléculaire et les compositions chimiques variées des élastomères leurs confèrent des propriétés qui en font des matériaux de plus en plus présents dans les industries aéronautique, automobile, du bâtiment...

Ce chapitre présente le contexte industriel de l'étude à travers :

- le matériau étudié : élastomère silicone chargé VHDS 1029 produit par la société PAULSTRA et utilisé pour sa capacité à amortir les chocs ou à filtrer les vibrations tout en conservant une bonne stabilité thermique et inertie chimique,
- l'application industrielle : adaptateur de fréquence, pièce élastomérique intervenant dans le fonctionnement d'un moyeu rotor d'hélicoptère en permettant d'éviter le passage de la pale par sa fréquence propre de vibration (EUROCOPTER).



## PLAN DU CHAPITRE II

---

<b>II.1 Les caoutchoucs silicones chargés . . . . .</b>	<b>23</b>
II.1.1 Généralités . . . . .	23
II.1.2 Le matériau de l'étude : Silicone VHDS 1029 . . . . .	23
II.1.2.a Observation microscopique . . . . .	24
II.1.2.b Détermination de la température de transition vitreuse . . . . .	25
<b>II.2 Utilisation industrielle . . . . .</b>	<b>27</b>
II.2.1 Propriété d'amortissement . . . . .	27
II.2.2 Fonctionnement d'un moyeu rotor . . . . .	28
II.2.3 Adaptateur de fréquence . . . . .	30
II.2.4 Problématique industrielle . . . . .	32

---

## II.1 Les caoutchoucs silicones chargés

### II.1.1 Généralités

Les silicones sont des polymères existant sous trois formes physiques : huiles, élastomères et résines. Ici, nous nous intéressons plus particulièrement aux élastomères silicones (dits parfois "caoutchoucs silicones", cf. TAB. II.1).

Nom des silicones	Désignation
Methyl-(Poly)Siloxane	MQ
Methyl-Vinyl-(Poly)Siloxane	MVQ
Phenyl-Methyl-Vinyl-(Poly)Siloxane	PMVQ
Fluoro-Methyl-Vinyl-(Poly)Siloxane	FMVQ

TABLEAU II.1 – *Désignation des caoutchoucs silicones les plus répandus dans la littérature.*

Les caoutchoucs silicones sont plus résistants à la chaleur et au froid que la plupart des élastomères. En effet, ils possèdent une très grande stabilité thermique (de -80 à 200°C) et une excellente inertie chimique. Ils présentent une très bonne résistance à l'ozone, au vieillissement et aux intempéries mais en revanche aucune résistance aux huiles et aux fuels<sup>(1)</sup>. Ces matériaux présentant des propriétés physiques très faibles, on leur ajoute alors généralement des charges. On peut lire à travers les données fabricants une représentation générale des propriétés de ce type de matériaux répertoriée dans le TABLEAU II.2.

	Q/MQ/MVQ	FMVQ	VHDS
Dureté Shore	30/85	30/85	33/77
Contrainte avant rupture (MPa)	8	8	6.5/10.5
Déformation à rupture (%)	250	200	400/800
Domaine de stabilité thermique (°C)	-70 à +200	-55 à +180	-80 à +200

TABLEAU II.2 – *Représentation générale des propriétés des silicones.*

### II.1.2 Le matériau de l'étude : Silicone VHDS 1029

Le matériau de cette étude est un caoutchouc silicone VHDS 1029 produit par la société PAULSTRA utilisé pour sa capacité à amortir les chocs ou à filtrer les vibrations tout en conservant une très grande stabilité thermique et inertie chimique. Les détails concernant son utilisation industrielle au sein de la société EUROCOPTER sont présentés au paragraphe II.2.

---

(1). Les silicones fluorés (FVMQ) possèdent un domaine de stabilité thermique peut être moins large que les autres caoutchoucs silicones mais présentent une meilleure résistance aux huiles et fuels.

L'industriel producteur du VHDS 1029 (PAULSTRA) souhaitant conserver une certaine confidentialité concernant la fabrication de son matériau, le lecteur comprendra qu'il nous est impossible d'être précis quant à sa description. Malgré cela, nous avons réalisé quelques observations microscopiques au sein du Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris et déterminé sa température de transition vitreuse au sein du Laboratoire de Mécanique et de Rhéologie de Tours.

### II.1.2.a Observation microscopique

Une série d'observations au microscope électronique à balayage (M.E.B.)<sup>(2)</sup> sur l'endommagement et la fatigue de ce matériau a permis de mettre en évidence l'existence de plusieurs types de charges présentes dans le matériau [COURTOIS, 2003]. Ces observations microscopiques ont été réalisées dans le cadre d'un partenariat avec le Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris avec la collaboration de LAIARINANDRASANA *et al.* [2003].

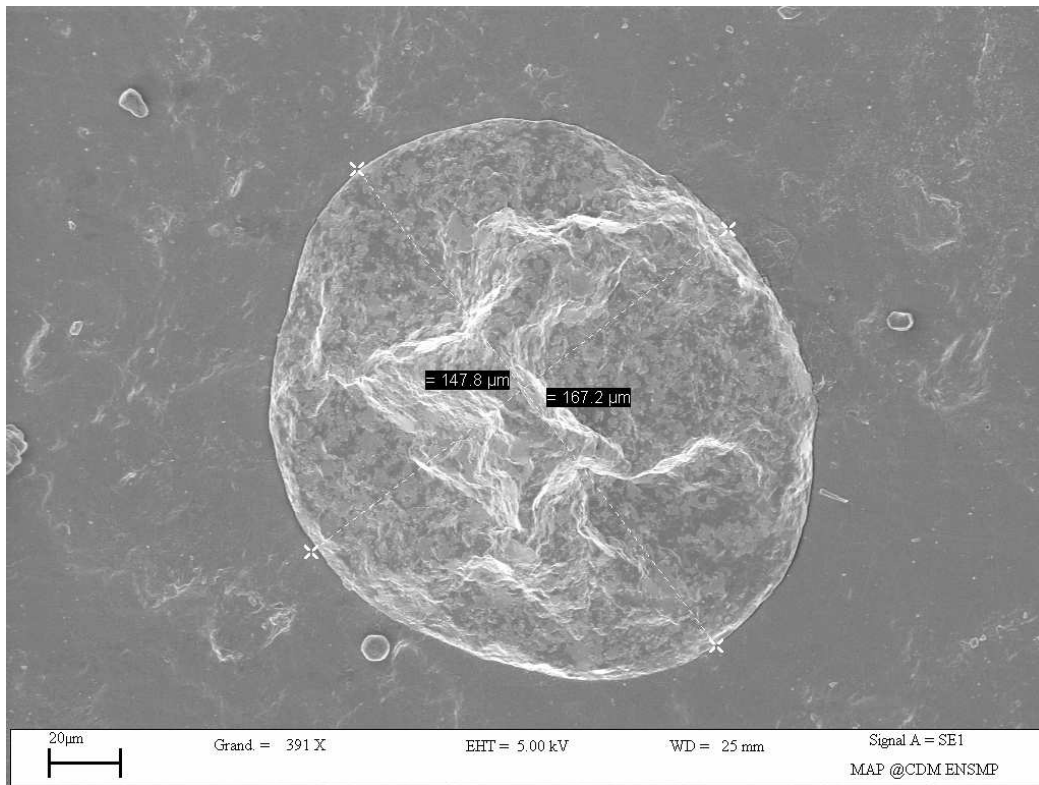


FIGURE II.1 – Observation d'un agglomérat de silice de grande taille sur une éprouvette vierge de VHDS 1029.

(2). Cette série d'observations microscopiques a été réalisée pendant un stage de DEA au sein de l'équipe MN du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille [COURTOIS, 2003]

Lorsqu'on observe une photo prise au M.E.B. d'une éprouvette vierge, on constate que nous sommes en présence d'un agglomérat de silice de grande taille (*cf.* FIG. II.1). Cependant il existe plusieurs types de charges dans le matériau d'étude. Ces charges sont soit isolées, soit regroupées en agglomérats.

En utilisant une micro-sonde, il a été possible de déterminer la composition chimique des charges observées. L'analyse des résultats donne alors plusieurs types de charges, de forme et de composition différentes.

### II.1.2.b Détermination de la température de transition vitreuse

Cette étude a été menée au sein du Laboratoire de Mécanique et de Rhéologie de Tours en collaboration avec F. LACROIX et S. MÉO dans la perspective de déterminer la température de transition vitreuse et par la même de définir la plage de stabilité thermique d'utilisation du matériau.

Pour cela comme nous l'avons précisé au paragraphe I.3, nous avons suivi l'évolution des modules de gain noté  $E'$  et de perte noté  $E''$  ainsi que le facteur d'amortissement tel que  $\tan \delta = \frac{E''}{E'}$  suivant la température sur 3 éprouvettes (*cf.* FIG. II.2). Ces grandeurs caractéristiques sont définies plus précisément en ANNEXE C.2. L'obtention de la température de transition vitreuse s'effectue alors en observant la valeur de la température pour laquelle la courbe représentative de  $\tan \delta$  atteint son maximum (*cf.* FIG. II.3).

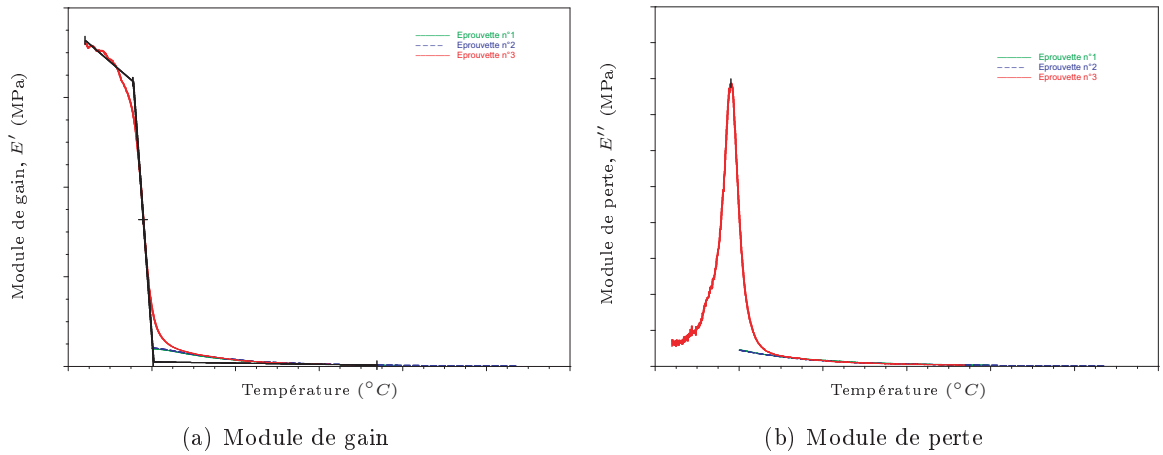


FIGURE II.2 – Observation de l'évolution de  $E'$  et  $E''$  suivant la température.

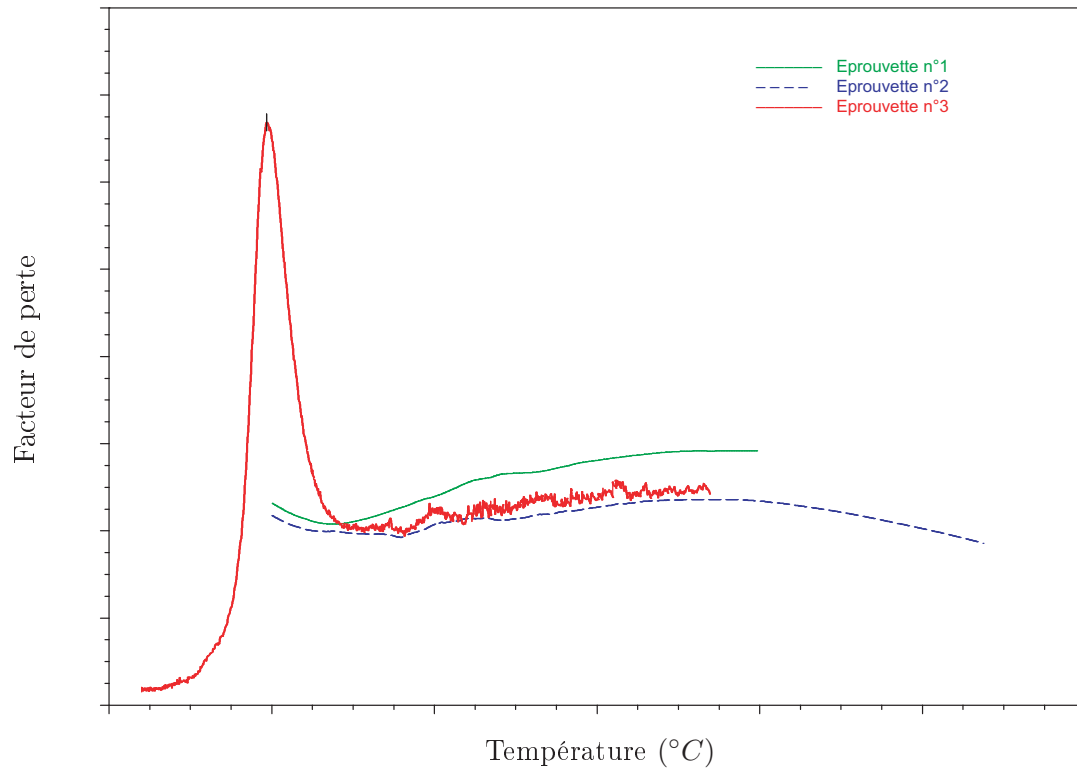


FIGURE II.3 – Observation de l'évolution de  $\tan \delta$  suivant la température.

## II.2 Utilisation industrielle

### II.2.1 Propriété d'amortissement

Parmi toutes les propriétés que l'on a pu citer auparavant sur les caoutchoucs, on peut noter la capacité d'amortir les chocs ou de filtrer les vibrations. Il s'agit là de deux propriétés extrêmement importantes dans le monde des transports. Ainsi, le pneumatique amortit des irrégularités de la route en assurant le confort du conducteur et des passagers. Il encaisse les déformations provoquées par les obstacles et les inégalités du sol. Dans le domaine automobile, les pièces amortissantes ne se limitent pas aux seuls pneumatiques. Les différentes pièces antivibratoires (supports moteurs...) permettent de filtrer les vibrations en provenance du moteur ou des organes de liaison au sol. Les propriétés antivibratoires des pièces en caoutchouc sont également utilisées dans le domaine des travaux publics : appuis de pont, plots antisismiques...

Il existe une littérature importante concernant l'étude du caractère élasto-dissipatif des élastomères. Le TABLEAU II.3 présente quelques exemples de domaines d'applications.

Domaines	Applications	Auteurs	Nationalités
Aéronautique	Amortisseur de traînée	BRACKBILL [2000]	États Unis
		KAMATH <i>et al.</i> [2000]	États Unis
		BOUKAMEL <i>et al.</i> [2000]	France
		LESIEUTRE et GOVINDSWAMY [1996]	États Unis
		GANDHI et CHOPRA [1994]	États Unis
	Butée lamifiée	ABOUCHITA <i>et al.</i> [2003]	Maroc
		LEJEUNES <i>et al.</i> [2003]	France
		BOUKAMEL [1988]	France
	Peau de ballons atmosphériques	GOLDEN <i>et al.</i> [1999]	États Unis
Support de système aérospatiaux	ROUSSEAU <i>et al.</i> [2002]	France	
Automobile	Suspensions	SAAD [2003]	France
	Pneumatique	WINEMAN <i>et al.</i> [1998]	États Unis
		LAHELLEC [2001]	France
		LE TALLEC et RAHIER [1994]	France
Médecine	Cornée	KALISKE et ROTHERT [2000]	Allemagne
	Tissus cérébraux	DARVISH et CRANDALL [2001]	États Unis
	Tissus artériels	HOLZAPFEL <i>et al.</i> [2002]	Autriche
	Tissus biologiques souples	BERGSTRÖM et BOYCE [2001]	États Unis
Agro-alimentaire	Pâte (fabrication du pain)	PHAN-THIEN [2000]	Australie
Prêt à porter	Semelles de chaussure	ROBISSON [2000]	France
Travaux publics	Plots antisismiques	BURTSCHER et DORFMANN [2004]	Autriche

TABLEAU II.3 – Quelques exemples d'applications industrielles utilisant les élastomères pour leur capacité amortissante.

Une présentation de la méthode classique d'étude de ces phénomènes dissipatifs en régime harmonique, appelée "Méthode d'analyse complexe", est présentée en ANNEXE C.2 où les propriétés d'amortissement d'un matériau sont traduites par l'énergie dissipée sous forme de chaleur au cours d'un chargement cyclique. Elle s'applique à l'ensemble des nombres complexes sous l'hypothèse des petites perturbations et nécessite l'utilisation d'un modèle rhéologique global peu prédictif. Les lois ainsi obtenues peuvent être intégrées dans des modèles éléments finis, qui conduisent à des calculs lourds et difficilement intégrables dans des systèmes possédant un grand nombre de degrés de liberté.

Pour l'heure, il paraît important avant d'entrer dans le vif de l'étude, de situer le caractère amortissant nécessaire au bon fonctionnement du moyeu rotor d'un hélicoptère.

### II.2.2 Fonctionnement d'un moyeu rotor

Lors d'un vol, la pale de l'hélicoptère est soumise à son propre poids (qu'on négligera face aux autres forces), à la portance, à la force centrifuge et à la traînée *i.e.* force d'inertie qui sollicite la pale dans son plan de rotation (*cf.* FIG. II.4).

En vol de transition, la vitesse de déplacement d'un hélicoptère conduit à une répartition dissymétrique des vitesses linéaires de rotation le long de la pale (*cf.* FIG. II.5). De plus, l'effet

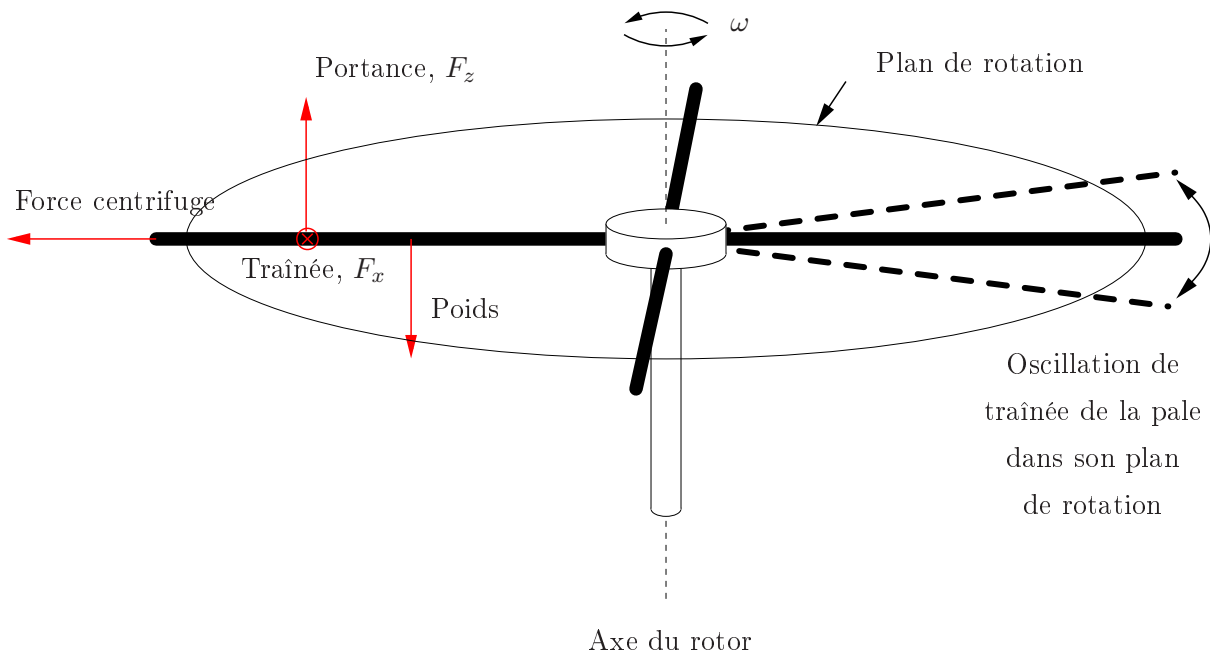
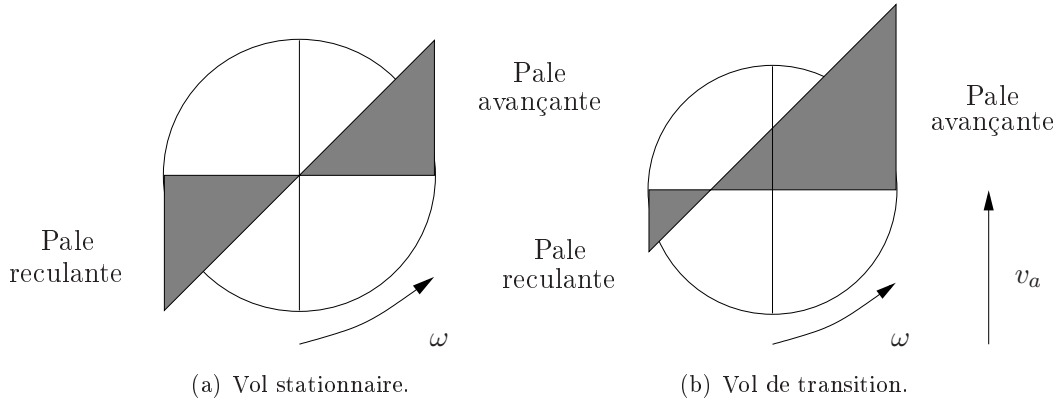
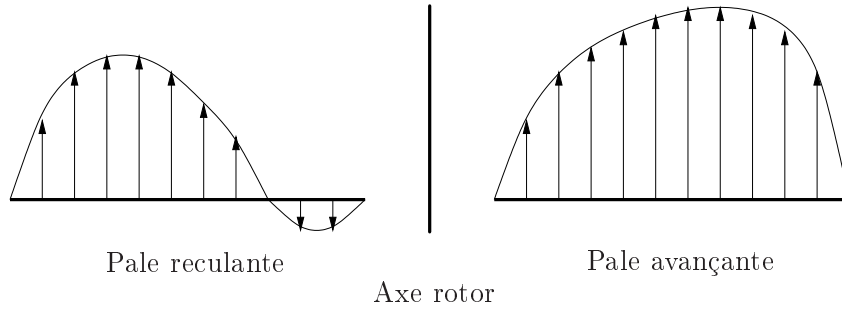


FIGURE II.4 – *Bilan des forces sur une pale d'hélicoptère.*

FIGURE II.5 – *Composition des vitesses.*FIGURE II.6 – *Répartition des efforts de portance.*

conjugué de la vitesse de rotation des pales  $\omega^{(3)}$  et de la vitesse de déplacement longitudinal de l'appareil  $V$  conduit à une vitesse en bout de pale du type :

$$v_L = v_{rot} + v_a = \omega L + V \sin(\omega t), \quad (\text{II.1})$$

avec  $L$  la longueur de la pale. Ceci induit une variation de vitesse des extrémités des pales de 600 à 1200 km/h en vol de transition.

Il est alors possible de calculer la force de portance  $F_z = \frac{1}{2} \rho_{air} v_r^2 C_z$  où  $C_z$ ,  $v_r$ , et  $\rho_{air}$  sont respectivement le coefficient de portance, la vitesse relative qui représente la vitesse de rotation ajoutée à la vitesse d'avancement  $v_a$  et la masse volumique de l'air. L'effort de portance sera donc différent en chaque point de la pale (cf. FIG. II.6).

La dissymétrie latérale de portance provoque un mouvement de roulis de l'hélicoptère. Pour pallier ce problème et donc pour assurer la symétrie des efforts et l'équilibre des moments, il est nécessaire que la pale avançante ait une inclinaison différente de celle de la pale reculante. C'est la butée sphérique, assemblage de coupelles d'élastomères et d'acier (appelée aussi lamifié

(3). La vitesse de rotation du rotor principal est comprise entre 300 et 550 tours/minute et celle du rotor de queue est comprise entre 1500 et 4000 tours/minute. Elles dépendent essentiellement du type de machine.



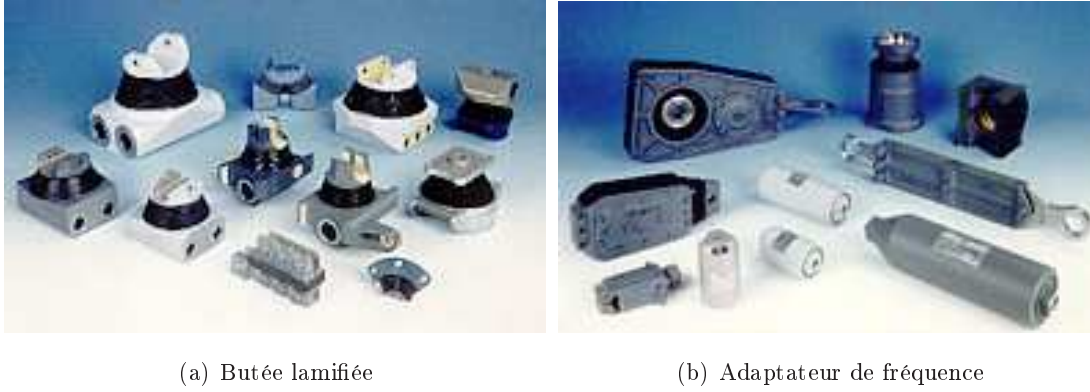


FIGURE II.7 – Pièces élastomériques d'un rotor d'hélicoptère, HUTCHINSON.

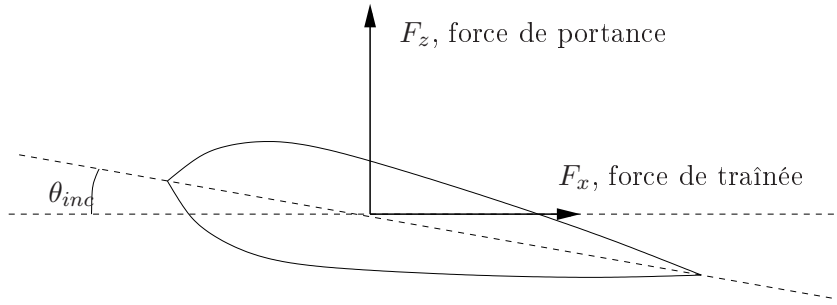


FIGURE II.8 – Inclinaison de la pale.

élastomère/métal, cf. FIG. II.7(a)), qui permet le mouvement relatif de la pale par rapport au moyeu rotor.

Cette modification d'inclinaison (on notera  $\theta_{inc}$  l'angle d'inclinaison de la pale) entraîne alors une modification du coefficient de traînée  $C_x$  (cf. FIG. II.8). Cela implique donc une variation de la force de traînée  $F_x = \frac{1}{2}\rho_{air}v_r^2 C_x$  qui provoque une oscillation de la pale dans son plan de rotation (cf. FIG. II.4) qui peut s'assimiler à un pendule dont la force de rappel est la force centrifuge. Lorsqu'on monte en régime, la fréquence propre de traînée de la pale  $f_{r_0}$  croise le regime nominal d'oscillation de celle-ci. Il peut alors se produire un phénomène de résonance qui peut arracher le rotor ou faire basculer l'hélicoptère. L'adaptateur de fréquence permet par sa fonction amortissante d'éviter ces phénomènes de résonance. C'est pourquoi, il est aussi appelé amortisseur de traînée (cf. FIG. II.4 et FIG. II.9).

### II.2.3 Adaptateur de fréquence

Les premiers amortisseurs de traînée étaient hydrauliques, ce qui conduisait à des équipements volumineux et coûteux (circuit d'huile sous pression. . .). Les adaptateurs de fréquence élastomériques ont été mis en service sur des hélicoptères de type "gazelle" en 1970 (cf. FIG. II.10(a)).

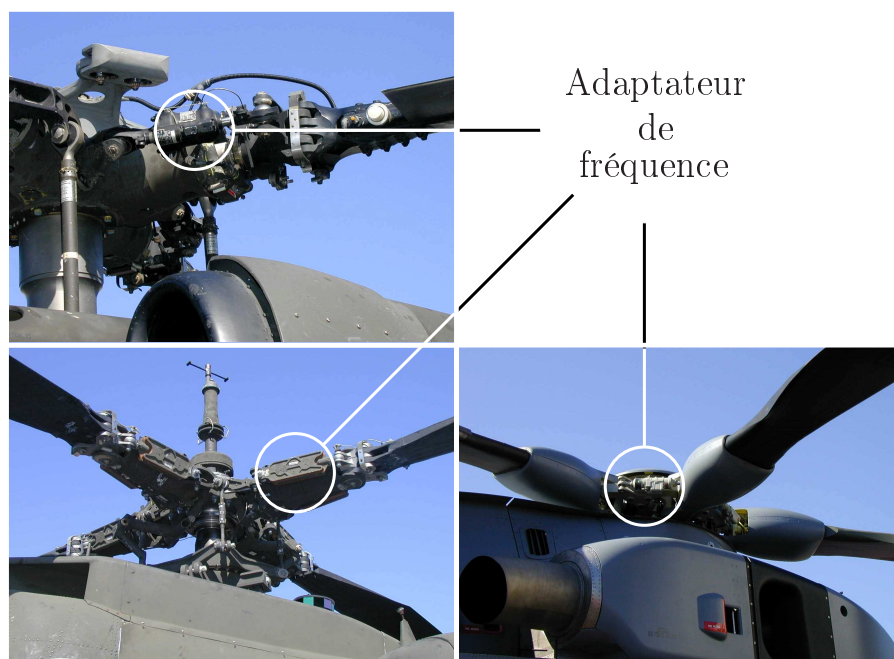


FIGURE II.9 – *Position d'un adaptateur de fréquence sur un moyeu rotor d'hélicoptère.*

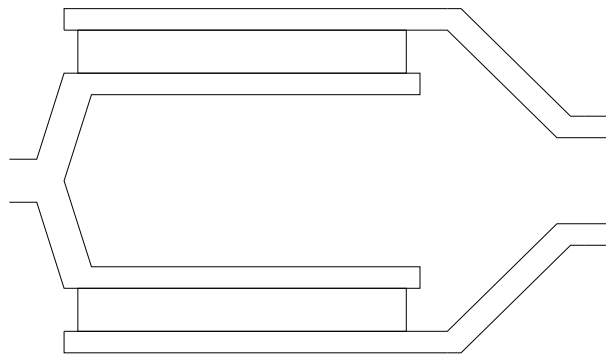


(a) Gazelle SA.341

(b) Colibri EC 120

FIGURE II.10 – *Exemple d'hélicoptère possédant des pièces élastomériques, EUROCOPTER.*

Il s'agit en général, d'une pièce cylindrique constituée d'un élastomère cisailé par deux cylindres en acier dont le rôle est de dissiper une partie de l'énergie mécanique (*cf.* FIG. II.11). L'élastomère utilisé est dans ce cas un mélange synthétique à base de silicone (VHDS 1029, *cf.* § II.1.2) dont le comportement est suffisamment stable pour les températures et les sollicitations complexes d'utilisation des adaptateurs de fréquence.

FIGURE II.11 – *Coupe d'un adaptateur de fréquence classique.*

#### II.2.4 Problématique industrielle

L'objectif de conception d'une nouvelle génération d'adaptateurs de fréquence passe nécessairement par une bonne maîtrise du comportement de ces pièces élastomériques face aux conditions d'utilisation extrêmes qu'elles subissent. L'estimation de la durée de vie et la prévision de leur réponse sous des sollicitations statiques, dynamiques et thermiques sont donc des caractéristiques du matériau qu'un industriel ne peut écarter.

Paramètres de sollicitation	Domaine
Fréquence	$< 30Hz$
Amplitude statique "moyenne"	$< 25\%$
Amplitude dynamique "moyenne"	$< 25\%$
Amplitude statique "maxi"	$< 55\%$
Amplitude dynamique "maxi"	$< 40\%$

TABLEAU II.4 – *Enveloppe des sollicitations des adaptateurs des rotors principal et arrière.*

La modélisation du comportement des élastomères utilisés dans la fabrication de ces pièces nécessite la prise en compte des grandes déformations, des processus dissipatifs et de l'influence de la température sur le comportement thermo-mécanique.

Ainsi, parmi les aspects de comportement à considérer, on peut citer :

- l'hyperélasticité, l'élastoplasticité et la viscoélasticité pour les sollicitations statiques et dynamiques,
- le couplage thermo-mécanique pour modéliser les phénomènes dissipatifs dépendant de la température,
- la modélisation de l'endommagement afin de prévoir la durée de vie des pièces en élastomère.

Les premiers volets de ces thèmes ont fait l'objet d'un programme de recherche de 1991 à 1994, initié par Eurocopter (Aérospatiale/DH) et mené en collaboration avec l'Equipe Modèles Numé-

riques du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille.

Le cadre général de ces travaux a porté d'une part sur la modélisation, la caractérisation et l'identification du comportement des élastomères et d'autre part sur la formulation numérique et la mise en œuvre des modèles à travers des algorithmes numériques basés sur la méthode des éléments finis.

Dès lors, aux vues des résultats de ces travaux, on peut aujourd'hui considérer que les aspects de comportement hyperélastique sont bien maîtrisés aussi bien sur le plan de la formulation numérique que sur le plan de la caractérisation expérimentale voire même au niveau de la conception de pièces complexes constituées d'élastomères hyperélastiques. Quant au comportement viscoélastique en grandes déformations (que nous appellerons hyper-viscoélasticité), les développements effectués à ce jour par GABRIELI [1995] et MÉO [2000], peuvent être synthétisés comme suit :

- la généralisation des modèles rhéologiques aux grandes déformations via la notion de configuration intermédiaire,
- la mise en œuvre d'une formulation en éléments finis basée sur ces modèles de comportement,
- l'identification des paramètres du modèle sur des essais cycliques en cisaillement.

Les résultats obtenus permettent ainsi de valider les modèles développés pour une sollicitation cyclique sinusoïdale donnée.

Sur le couplage thermo-mécanique, les travaux menés entre 1994 et 1998 en collaboration avec l'Institut Universitaire de Systèmes Thermiques Industriels (IUSTI) ont permis de réaliser une plateforme de couplage faible permettant de résoudre par la méthode des éléments finis le problème thermo-mécanique basé sur un comportement en grandes déformations viscoélastiques et sur la résolution du problème thermique en configuration Lagrangienne. Les résultats obtenus présentent alors une bonne corrélation avec les mesures expérimentales si l'on suppose qu'une proportion de la dissipation visqueuse n'est pas transformée en chaleur et est utilisée pour le réarrangement de la micro-structure de l'élastomère tel que la cohésion/décohésion entre les charges et la gomme.

Par ailleurs sur l'endommagement des élastomères chargés, des travaux ont été menés par BIKARD [2002] permettant d'intégrer ce phénomène en se basant sur le modèle de ROUSSELIER (aciers chargés de carbures). L'endommagement est alors supposé majoritairement dû à des processus de décohésion de la matrice autour des inclusions, c'est à dire des micro-cavités.

Les travaux développés depuis une dizaine d'années ont donc permis de mettre au point des modèles phénoménologiques et présentent une relativement bonne corrélation avec l'expérience. Cependant, ils méritent des analyses et des investigations approfondies. En effet pour le comportement hyper-viscoélastique, la détermination de la réponse sous sollicitations multi-harmoniques nécessite un enrichissement des modèles rhéologiques.

L'objet du programme de recherche actuel planifié sur cinq ans et englobant deux thèses est de développer des modèles statistiques pour les élastomères chargés. Ces modèles sont basés sur des motivations micro-structurales afin de rendre compte dans un premier temps, des interactions entre les charges et la matrice élastomérique à différentes températures et sous des sollicitations dynamiques variées (c'est l'objectif de ce travail de recherche). Nous aborderons dans un second temps les aspects d'endommagement en analysant les micro-mécanismes de rupture initiés à l'intérieur des agglomérats de charges ainsi que les mécanismes de décohésion aux interfaces charges/matrice (non étudié ici).

L'objectif est donc de cerner finement le comportement de ces matériaux à travers :

- le développement de modèles de comportement ;
- l'identification des paramètres gouvernant ces modèles à travers la réalisation d'essais de caractérisation à différentes températures ;
- la validation de ces modèles via la confrontation à des essais sous sollicitations complexes ;
- l'implémentation et la mise au point de codes éléments finis pour la simulation thermomécanique du comportement de pièces réelles.

L'aboutissement logique de cette démarche devra se concrétiser par une procédure d'aide à la conception de ces pièces dissipatives en élastomère.

---

## Campagne expérimentale réalisée sur l'élastomère silicone VHDS 1029

**C**e chapitre présente les résultats d'essais expérimentaux que nous avons réalisés sur des éprouvettes de traction uniaxiale et de double cisaillement en élastomère silicone VHDS 1029 fournis par la société PAULSTRA. Cette campagne d'essais a été réalisée au sein du laboratoire d'essais mécaniques de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (ESIM) pour les essais de traction et au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille (LMA) pour ceux de double-cisaillement. Plusieurs types de sollicitations ont été imposés tels que la relaxation et les essais cycliques pour différentes températures. Une analyse des résultats est alors proposée nous permettant ainsi d'émettre quelques hypothèses sur le comportement du matériau.

## PLAN DU CHAPITRE III

---

<b>III.1 Présentation</b>	<b>37</b>
III.1.1 Géométrie des éprouvettes	37
III.1.1.a Eprouvette de traction	37
III.1.1.b Eprouvette de double cisaillement	37
III.1.2 Moyens expérimentaux	38
<b>III.2 Assouplissement des éprouvettes : effet MULLINS</b>	<b>41</b>
<b>III.3 Procédure d'exploitation des résultats</b>	<b>42</b>
III.3.1 Essais de relaxation	42
III.3.2 Essais cycliques	42
<b>III.4 Essais de traction uniaxiale</b>	<b>44</b>
III.4.1 Montée en charge	44
III.4.2 Relaxation	45
III.4.2.a Influence de l'échelon de déformation	45
III.4.2.b Influence de la température	46
III.4.3 Traction cyclique	50
III.4.3.a Influence de la déformation maximale de chargement	50
<b>III.5 Essais de double cisaillement</b>	<b>53</b>
III.5.1 Charge-décharge à basse vitesse de déformation	53
III.5.2 Relaxation	54
III.5.2.a Influence de l'échelon de déformation	54
III.5.2.b Influence de la température	55
III.5.3 Essais cycliques triangulaires	59
III.5.3.a Influence de l'amplitude de sollicitation	60
III.5.3.b Influence du taux de déformation	61
III.5.3.c Influence de la température	62
III.5.4 Essais cycliques sinusoïdaux	63
III.5.4.a Influence de l'amplitude dynamique de sollicitation	64
III.5.4.b Influence de la fréquence de sollicitation	65
III.5.4.c Exemples d'essais de sollicitations sinusoïdales plus complexes	66
<b>III.6 Conclusion</b>	<b>72</b>

---

## III.1 Présentation

Le matériau utilisé dans cette campagne d'essai est un silicone VHDS 1029 utilisé pour la fabrication des amortisseurs de traînée (*cf.* § II.2) .

### III.1.1 Géométrie des éprouvettes

Pour cette campagne, nous avons utilisé des éprouvettes de traction et de double cisaillement réalisées par la société PAULSTRA (*cf.* FIG. III.1).



FIGURE III.1 – *Éprouvettes de traction et de double cisaillement.*

#### III.1.1.a Éprouvette de traction

Les éprouvettes de traction sont du type haltère (H2) telles qu'elles sont définies dans la norme NF T46-002. La FIGURE III.2 propose les dimensions d'une telle éprouvette.

#### III.1.1.b Éprouvette de double cisaillement

Une éprouvette de double cisaillement est constituée par 2 éléments d'élastomère parallélépipédiques identiques ayant les dimensions suivantes :

- épaisseur :  $5 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$ ,
- largeur :  $25 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$ ,
- longueur :  $96 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$ .



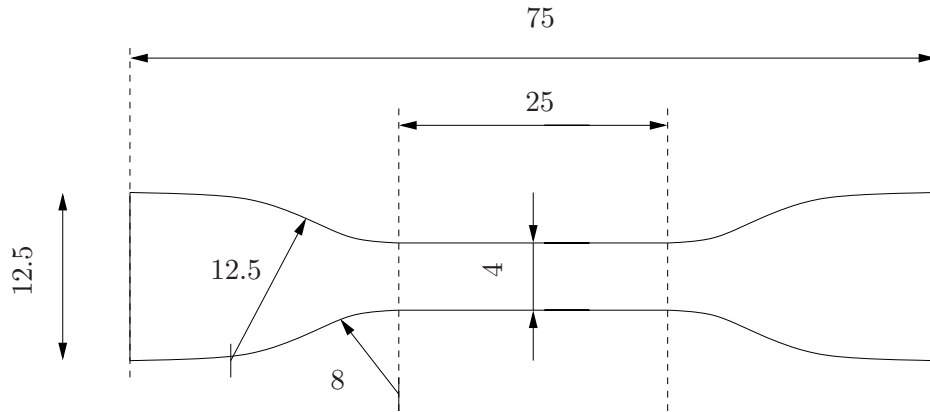


FIGURE III.2 – Dimensions éprouvette haltère type H2 (mm).

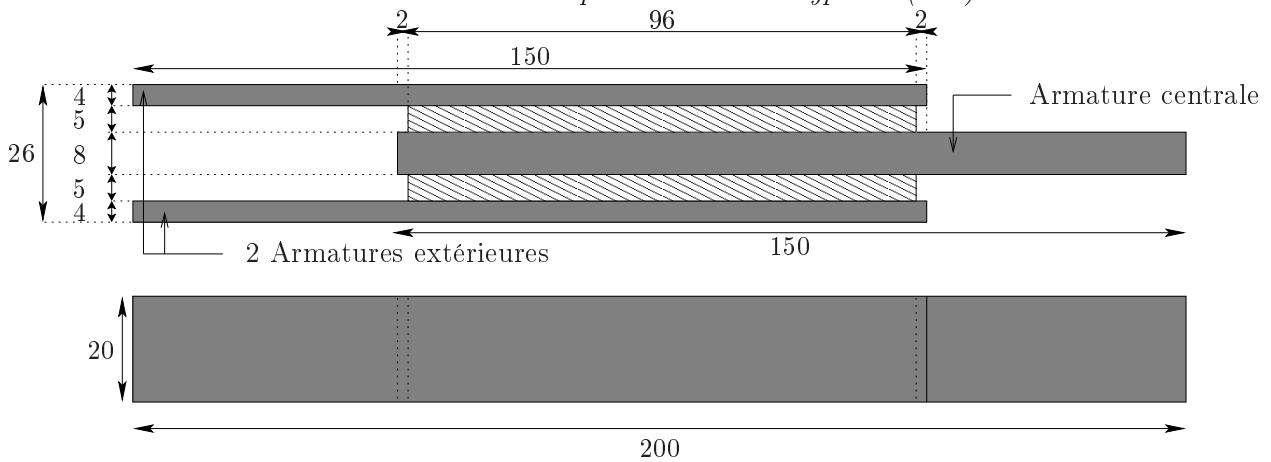


FIGURE III.3 – Dimensions éprouvette de double cisaillement (mm).

Ces éléments sont collés par vulcanisation des plus grandes faces en regard de 3 plaques rigides en aluminium de même largeur et de longueur appropriée pour permettre une disposition d'ensemble en forme de double empilage, la longueur de chaque élément étant placée dans le sens de l'effort de cisaillement. La FIGURE III.3 montre la réalisation d'une telle éprouvette. On réalise ainsi une structure à double cisaillement des 2 parallélogrammes d'élastomère disposés en parallèle.

### III.1.2 Moyens expérimentaux

La campagne d'essais a été réalisée sur deux machines différentes suivant le type d'essais :

- **Les essais de traction** ont été réalisés au sein du laboratoire d'essais mécaniques de l'ESIM sur une machine de traction-compression de type ADAMEL DY36 et d'une capacité de  $100kN$  équipée d'une enceinte thermique (cf. FIG. III.4(a)). Le pilotage s'effectue alors en déformation imposée par extensométrie laser et permet d'effectuer des essais à vitesse de déplacement constante (jusqu'à  $500mm.min^{-1}$ ). Le capteur d'effort utilisé pour ce type d'essai est un capteur d'une capacité maximale de  $10kN$  situé sur la traverse mobile et

permettant une bonne précision des résultats dans le domaine d'effort dans lequel nous nous plaçons. Nous avons utilisé des mors "auto-serrants" pour éprouvettes haltères. Les mesures de déformation et d'effort sont alors collectées via une carte d'acquisition (toutes les 500ms pour les essais de relaxation et toutes les 50ms pour les essais cycliques) d'un ordinateur sur lequel on peut visualiser en continu le cycle contrainte/déformation. Cette machine est équipée d'une enceinte thermostatée refroidie par une circulation d'azote et éventuellement réchauffée par une résistance électrique et ventilation d'air.

- **Les essais de double cisaillement** ont été réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) sur une machine dynamique type MTS-Model 322.21 T-Slot d'une capacité de 100kN (*cf.* FIG. III.4(b)). Le pilotage s'effectue dans ce cas aussi en déformation imposée<sup>(1)</sup> par un vérin hydraulique et permet d'effectuer des essais à vitesse de déplacement (ou fréquence) beaucoup plus importante que la précédente machine ( $\leq 100mm.s^{-1}$ ). Le capteur d'effort utilisé pour ce type d'essai est un capteur d'une capacité de charge de 100kN situé sur la traverse fixe. Les mesures de déformation et d'effort sont alors collectées via une carte d'acquisition (le temps d'acquisition est adapté à la vitesse de déplacement imposée) d'un ordinateur sur lequel on peut visualiser en continu le cycle contrainte/déformation. Cette machine est équipée d'une enceinte thermostatée type CET (*cf.* FIG. III.4(c)) refroidie par une circulation d'azote et réchauffée par une résistance électrique et ventilation d'air.

Les résultats des essais réalisés pendant cette campagne sont obtenus sous forme de courbes réponses : contrainte en fonction du temps ou contrainte en fonction de la déformation. Les grandeurs<sup>(2)</sup> mesurées sont présentées dans le TAB. III.1 suivant l'essai utilisé.

Essai	Contrainte mesurée	Déformation mesurée
Traction uniaxiale	$\bar{\pi}_{11}$	$\bar{\bar{F}}_{11} - 1 = \varepsilon$
Double cisaillement	$\bar{\pi}_{12}$	$\bar{\bar{F}}_{12} = \gamma$

TAB. III.1 – *Contrainte et déformation mesurée suivant l'essai réalisé.*

Le même type d'essai a été réalisé sur plusieurs éprouvettes pour contrôler la dispersion des résultats obtenus.

---

(1). Dans la suite, on utilisera abusivement le terme de "cisaillement" (chargement en effort imposé) à la place de "glissement" (chargement en déplacement imposé).

(2).  $\bar{\bar{F}}$  et  $\bar{\pi}$  respectivement tenseur gradient de la transformation et premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF sont présentés en ANNEXE A.



(a) ADAMEL DY36 (ESIM).



(b) MTS (LMA).



(c) Enceinte thermique CET (ESIM).

FIGURE III.4 – Machines et enceintes thermiques utilisées dans cette campagne d'essais.

## III.2 Assouplissement des éprouvettes : effet MULLINS

Les élastomères présentent une perte de raideur après une première charge connue sous le nom d'effet MULLINS vu au paragraphe I.5.2 et représenté sur la FIGURE III.5(a). Cet adoucissement lors du premier chargement est souvent considéré comme un phénomène d'endommagement dépendant de l'amplitude maximale du premier cycle (cf. FIG. III.5(b)). Dans la suite, nous avons décidé de solliciter préalablement nos éprouvettes de traction et de double cisaillement avec 10 cycles de chargement respectivement de  $\varepsilon_{max} = 100\%$  (ou  $200\%$ ) et de  $\gamma_{max} = 50\%$ . Cela nous permet donc de ne pas tenir compte de cet effet lors de la modélisation.

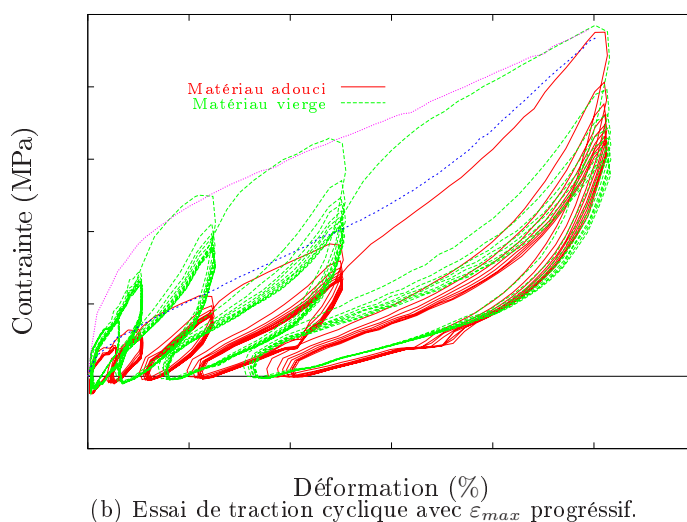
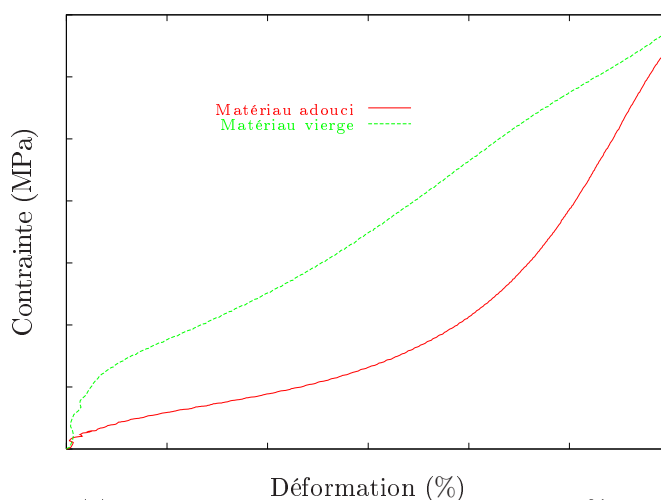


FIGURE III.5 – Observation de l'effet MULLINS à travers des essais de traction uniaxiale.

### III.3 Procédure d'exploitation des résultats

Avant de réaliser l'analyse des essais expérimentaux, nous proposons au lecteur une brève présentation des diverses grandeurs caractéristiques que nous avons employées dans l'exploitation des résultats des essais de relaxation et de chargements cycliques.

#### III.3.1 Essais de relaxation

Concernant les essais de relaxation, les grandeurs caractéristiques que nous avons utilisées sont les suivantes :

- le **taux de relaxation** noté  $T_{rel}(t \rightarrow \infty)$  tel que :

$$T_{rel}(t) = \frac{\sigma_{max} - \sigma(t)}{\sigma_{max}}, \quad (\text{III.1})$$

avec  $\sigma_{max} = \sigma(0)$ . Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , ce paramètre noté  $T_{rel}^\infty$  est caractéristique de l'élasticité différée. On observe alors l'évolution de la contrainte normalisée  $\left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_{max}}\right)$  suivant le temps pour obtenir son évolution.

- le **temps de relaxation** noté  $\tau_{rel}$  représenté par l'inverse de la pente de la courbe représentative de  $\vartheta(t)$  en fonction du logarithme du temps telle que :

$$\vartheta(t) = \frac{\sigma(t) - \sigma_\infty}{\sigma_{max} - \sigma_\infty} \simeq G \exp\left(-\frac{t}{\tau_{rel}}\right), \quad (\text{III.2})$$

où  $\sigma_\infty = \sigma(t \rightarrow \infty)$ . D'une manière générale, on peut caractériser cette grandeur par une série de PRONY du type  $\sum_{i=1}^n g_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$ .

#### REMARQUE III.1

Des essais de relaxation en traction uniaxiale et en double cisaillement d'une durée d'environ 2 jours et demi ont été réalisés. On a pu alors constater qu'il existe peu de différence (de l'ordre de 4% en traction uniaxiale et 1% en double cisaillement) entre la valeur de la réponse après 10 minutes et celle mesurée au bout d'une cinquantaine d'heures. Les essais de relaxation peuvent donc être stoppés après 10 minutes de mesure. □

#### III.3.2 Essais cycliques

Nous proposons d'analyser les résultats d'essais cycliques en observant les grandeurs caractéristiques suivantes pour un cycle stabilisé (cf. § I.5.2) :

- la **raideur globale** notée  $\Upsilon$  (ou module dynamique) caractéristique de l'élasticité d'un système telle que :

$$\Upsilon = \frac{|\sigma_{max} - \sigma_{min}|}{|\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}|}, \quad (\text{III.3})$$

il s'agit donc de mesurer la pente de la contrainte moyenne (cf. FIG. III.6(a)).

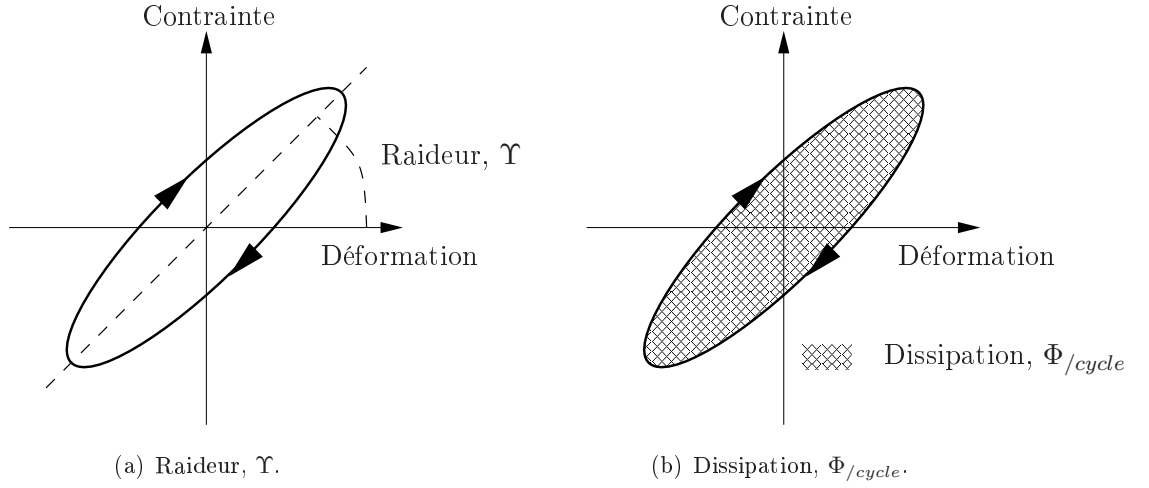


FIGURE III.6 – Présentation des grandeurs caractéristiques d'un essai cyclique stabilisé.

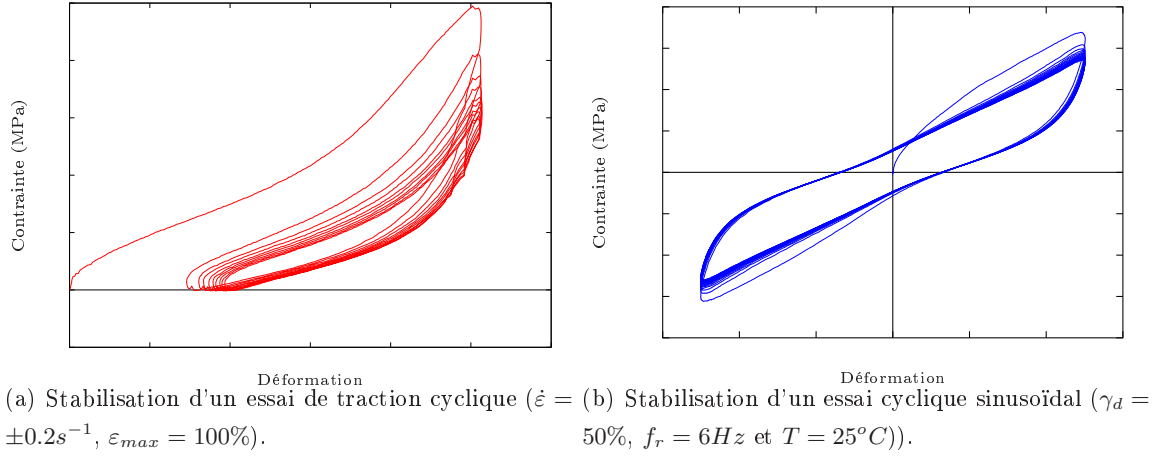


FIGURE III.7 – Stabilisation d'un essai cyclique en traction uniaxiale et en double cisaillement.

- et la **dissipation globale** notée  $\Phi_{cycle}$  caractéristique de l'amortissement d'un système telle que :

$$\Phi_{cycle} = \int_{cycle} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (III.4)$$

il s'agit dans ce cas de mesurer l'énergie dissipée au cours d'un cycle de sollicitation *i.e.* la surface d'une boucle d'hystérésis (*cf.* FIG. III.6(b)).

### REMARQUE III.2

L'examen des FIGURES III.7(a) et III.7(b) montre la nécessité d'imposer au moins 10 cycles pour obtenir une réponse stabilisée en traction uniaxiale et en double cisaillement.  $\square$

### III.4 Essais de traction uniaxiale

Nous présentons dans cette section les résultats d'essais de traction uniaxiale que nous avons réalisés. Plusieurs types de sollicitation sont proposés, associés à quelques remarques concernant l'influence des paramètres de ces essais. On propose alors :

- des essais monotones de montée en charge à diverses vitesses de chargement,
- des essais de relaxation à divers échelons de déformation pour différentes températures,
- des essais de traction cyclique à diverses vitesses et amplitudes de chargement.

#### REMARQUE III.3

L'enceinte thermique utilisée ici est munie d'une vitre permettant la transmission du rayon laser de l'extensomètre. Cependant, on observe une apparition de givre sur celle-ci au bout de quelques secondes de refroidissement qui gêne la lecture et donc qui rend impossible la réalisation d'essais cycliques aux températures les plus basses. □

#### III.4.1 Montée en charge

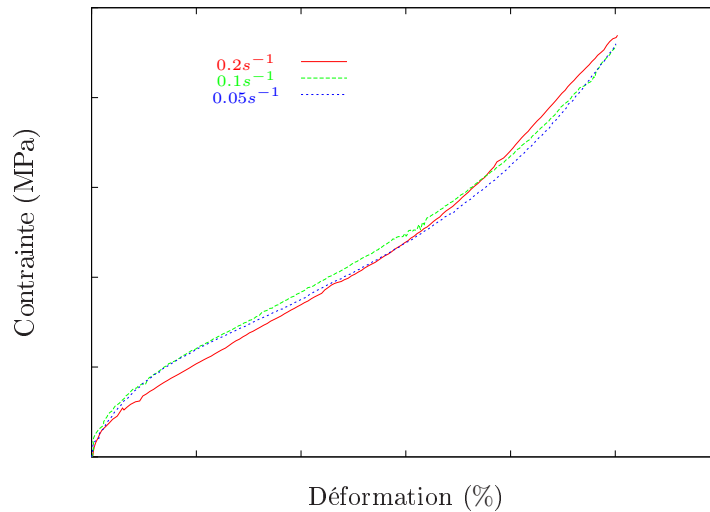


FIGURE III.8 – Observations d'essais monotones de montée en charge en traction uniaxiale pour différentes vitesses de sollicitation à température ambiante ( $\varepsilon_{max} = 100\%$ ).

**Constatations** : L'observation de la FIGURE III.8 montre que dans le domaine de taux de déformation dans lequel nous nous sommes placés ( $0.05s^{-1} \leq \dot{\varepsilon} \leq 0.2s^{-1}$ ), la vitesse de déformation n'a pas d'influence notable sur la réponse. On ne peut donc mettre en avant une réelle présence de viscosité. Cependant une non-linéarité de la courbe contrainte-déformation peut être observée pour une déformation maximale de 100%.

### III.4.2 Relaxation

#### III.4.2.a Influence de l'échelon de déformation

Concernant les essais de relaxation, l'éprouvette est soumise à plusieurs échelons de déformation (*i.e.* 25%, 50% et 100%). La réponse est alors caractérisée par l'observation de l'évolution de la contrainte normalisée suivant le temps. La vitesse de montée en charge est la plus importante que la machine de traction uniaxiale peut nous proposer en considérant les effets d'inertie, c'est à dire 300mm/min ( $\dot{\epsilon} = 0.2s^{-1}$ ).

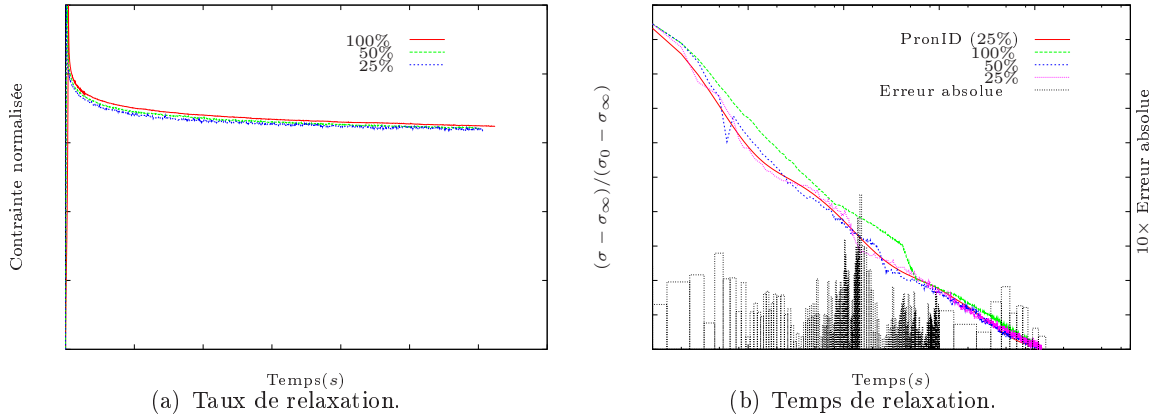


FIGURE III.9 – Observation d'essais de relaxation en traction uniaxiale à température ambiante.

#### Constatations

- L'examen de la FIGURE III.9(a) et du TABLEAU III.2 nous permet de constater que le taux de relaxation à 1200s noté  $T_{rel}^{\infty}$  est peu dépendant de l'échelon de déformation.

$\varepsilon_{max}$ (%)	25	50	100
$T_{rel}^{\infty}$	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU III.2 – Taux de relaxation suivant l'échelon de déformation en traction uniaxiale.

- On peut aussi réaliser le même constat concernant le temps de relaxation (*cf.* FIG. III.9(b)). Trois termes de la série de PRONY sont alors nécessaires pour identifier cet essai avec une erreur relative de 0.21% calculée au sens des moindres carrés (*cf.* TAB. III.3).

i	1	2	3
$g_i$	C.E.	C.E.	C.E.
$\tau_i$	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU III.3 – Paramètres identifiés d'une série de PRONY sur un essai de relaxation en traction uniaxiale.



### III.4.2.b Influence de la température

Puisque nous sommes dans l'incapacité d'effectuer des essais cycliques à basse température (*cf.* REM. III.3) et donc d'obtenir un état stabilisé, nous avons choisi préalablement d'assouplir les éprouvettes à température ambiante avec  $\varepsilon_{max} = 200\%$ <sup>(3)</sup> et  $\dot{\varepsilon} = 0.2s^{-1}$ . Ensuite, l'enceinte est placée à température ( $70^\circ C$ ,  $40^\circ C$ ,  $25^\circ C$ ,  $-25^\circ C$ ,  $-40^\circ C$  et  $-55^\circ C$ ) pour effectuer un essai de relaxation (25%, 50% et 100%) d'une durée de  $\Delta t = 660s$ . On propose alors d'observer le taux et le temps de relaxation à une amplitude  $\varepsilon_{max} = 50\%$  respectivement sur la FIGURE III.10 et la FIGURE III.11 à différentes températures.

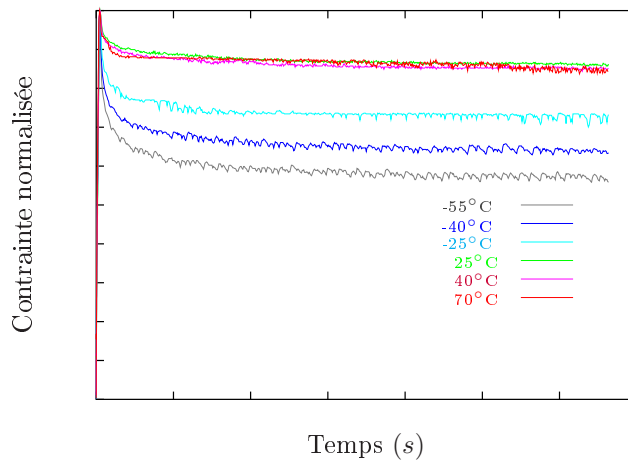


FIGURE III.10 – Observation de l'évolution du taux de relaxation suivant le temps à différentes température en traction uniaxiale ( $\varepsilon_{max} = 50\%$ ).

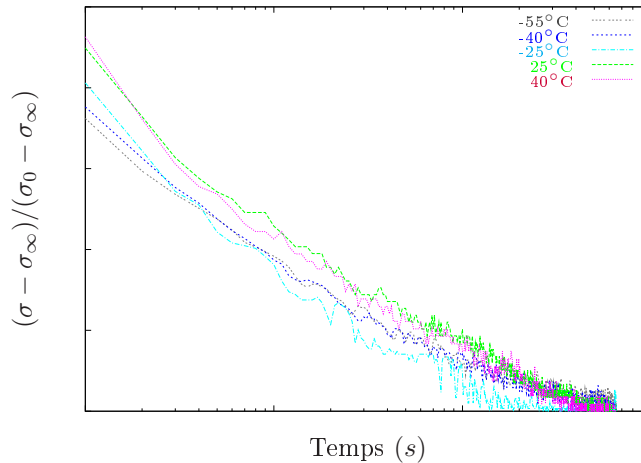


FIGURE III.11 – Observation du temps de relaxation à différentes températures en traction uniaxiale ( $\varepsilon_{max} = 50\%$ ).

(3). Dans ce cas, nous avons effectué un assouplissement à 200% pour pouvoir obtenir un état stabilisé lors de l'essai de relaxation avec un échelon de déformation de 100%.

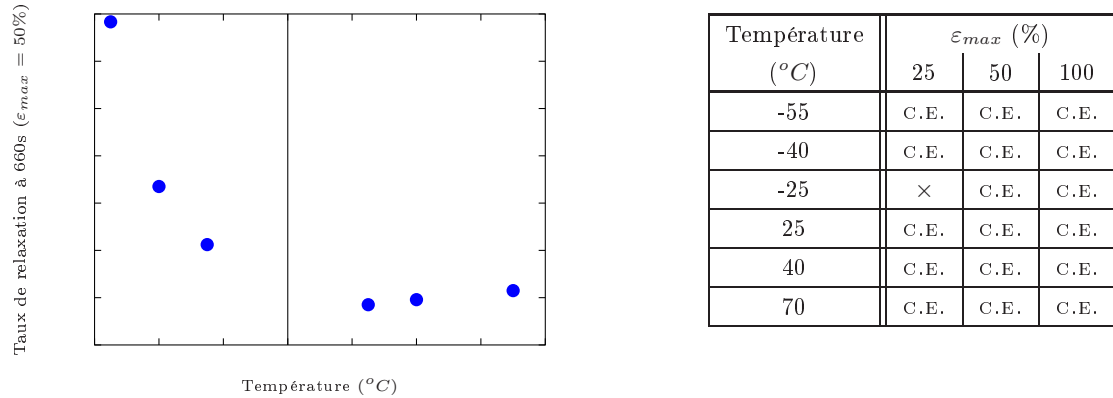


FIGURE III.12 – Evolution du taux de relaxation au bout de 660s suivant la température à différents échelons de déformation en traction uniaxiale.

**Constatations** : L'examen des résultats expérimentaux concernant l'influence de la température sur la relaxation (*cf.* FIG. III.10 et FIG. III.11) a permis de distinguer deux domaines de température caractérisés par une évolution des grandeurs caractéristiques différentes :

- $T \geq 25^{\circ}\text{C}$  : dans ce domaine, on constate que le taux et le temps de relaxation sont peu sensibles au changement de température ainsi qu'à l'échelon de déformation.
- $-55^{\circ}\text{C} \leq T \leq -25^{\circ}\text{C}$  : ici, on observe une évolution significative du taux de relaxation lorsqu'on diminue la température (*cf.* FIG. III.12). Cette constatation s'atténue avec l'amplitude de déformation (*cf.* FIG. III.13). Par contre, le temps de relaxation semble moins sensible au changement de température et à l'échelon de déformation (*cf.* FIG. III.14).

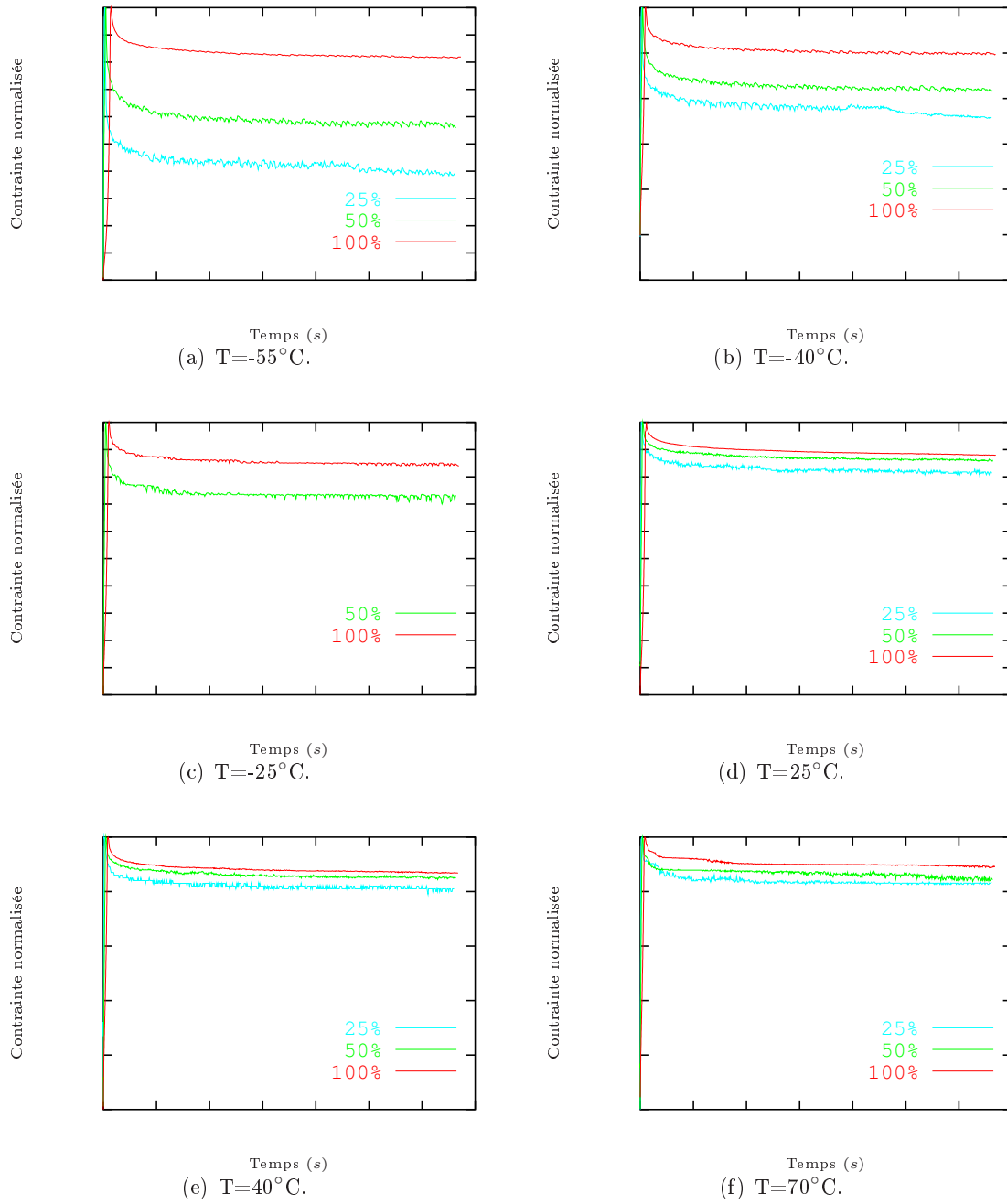


FIGURE III.13 – Observation du taux de relaxation à différents échelons de déformation pour différentes températures en traction uniaxiale.

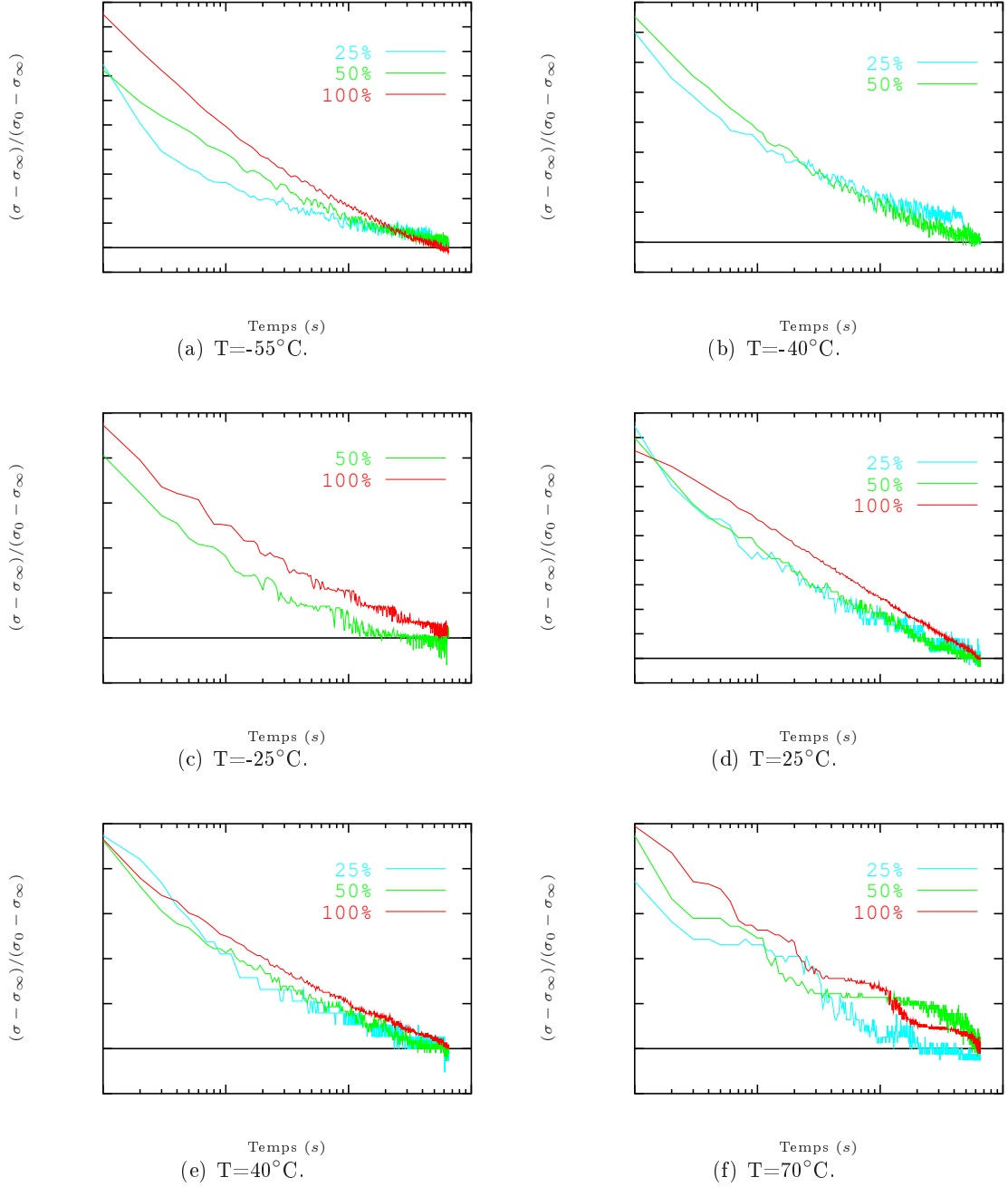


FIGURE III.14 – Observation du temps de relaxation à différents échelons de déformation pour différentes températures en traction uniaxiale.

### III.4.3 Traction cyclique

Nous appelons essai de traction cyclique, un essai cyclique triangulaire à vitesse de déformation imposée dont les conditions limites de chargement sont imposées comme suit,

- une déformation maximale donnée  $\varepsilon_{max}$ ,
- une déformation minimale ( $\varepsilon_{min} \geq 0$ ) telle que l'effort soit nul et permettant ainsi d'éviter le flambement de l'éprouvette H2 *i.e.* le passage en compression au retour à  $\varepsilon_{min}$ .

Pour faciliter sa compréhension, nous proposons au lecteur une représentation schématique observable sur la FIGURE III.15.

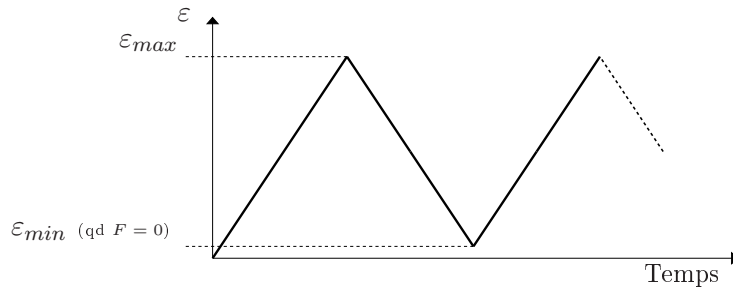


FIGURE III.15 – Représentation schématique d'un essai de traction cyclique.

#### III.4.3.a Influence de la déformation maximale de chargement

On propose d'effectuer des essais de traction cyclique à différentes déformations maximales pour une vitesse de déformation donnée (*cf.* FIG. III.16).

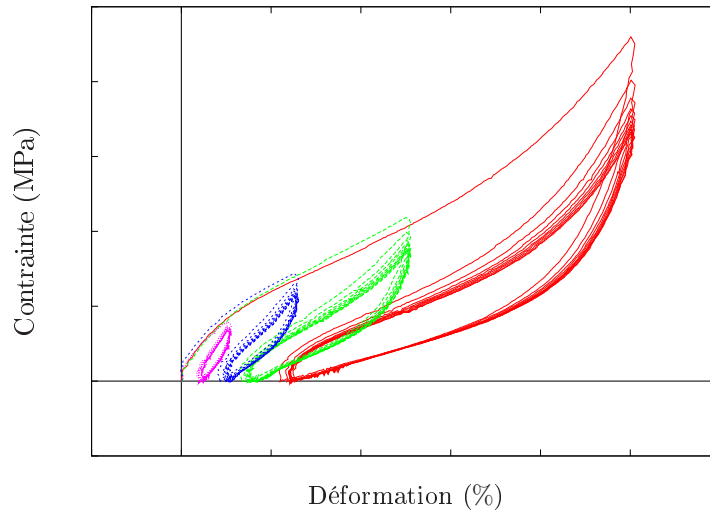


FIGURE III.16 – Observation de l'influence de la déformation maximale sur les essais de traction cyclique à température ambiante ( $\dot{\varepsilon} = \pm 0.05 s^{-1}$ ).

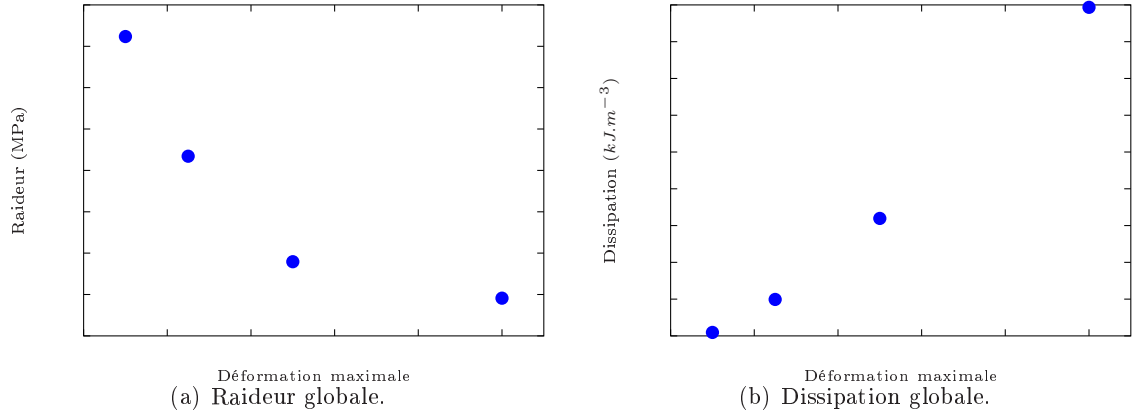


FIGURE III.17 – Observation de l'évolution de la raideur et de la dissipation suivant la déformation maximale pour des essais de traction cyclique à température ambiante.

$\varepsilon_{max}$ (%)	10	25	50	100
$\Upsilon$ (MPa)	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.
$\Phi_{cycle}$ (kJ.m <sup>-3</sup> )	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.
$\varepsilon_p$ (%)	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.

TABEAU III.4 – Evolution des caractéristiques d'un essai de traction cyclique suivant la déformation maximale à température ambiante ( $\dot{\varepsilon} = \pm 0.05 s^{-1}$ ).

$\dot{\varepsilon}$ (s <sup>-1</sup> )	$\pm 0.05$	$\pm 0.1$	$\pm 0.2$
$\varepsilon_p$ (%)	C.E.	C.E.	C.E.

TABEAU III.5 – Evolution de la déformation résiduelle suivant la vitesse de déformation pour des essais de traction cyclique à température ambiante ( $\varepsilon_{max} = 100\%$ ).

**Constatations** : Via l'examen de la raideur et de la dissipation du cycle stabilisé, on peut noter les remarques suivantes :

- une forte rigidification pour les faibles amplitudes maximales de déformation et une augmentation de la dissipation suivant la déformation maximale (*cf.* FIG. III.17 et TAB. III.6),
- une augmentation de la déformation résiduelle telle que  $\varepsilon_p = \varepsilon_{min}$  suivant l'amplitude maximale de déformation (*cf.* TAB. III.6 et FIG. III.18(a)),
- un essai de traction cyclique ne nous permet pas d'effectuer des constatations notables suivant l'évolution du taux de déformation. En effet, à chaque  $\dot{\varepsilon}$  donné correspond une déformation résiduelle différente (*cf.* TAB. III.5 et FIG. III.18(b)).

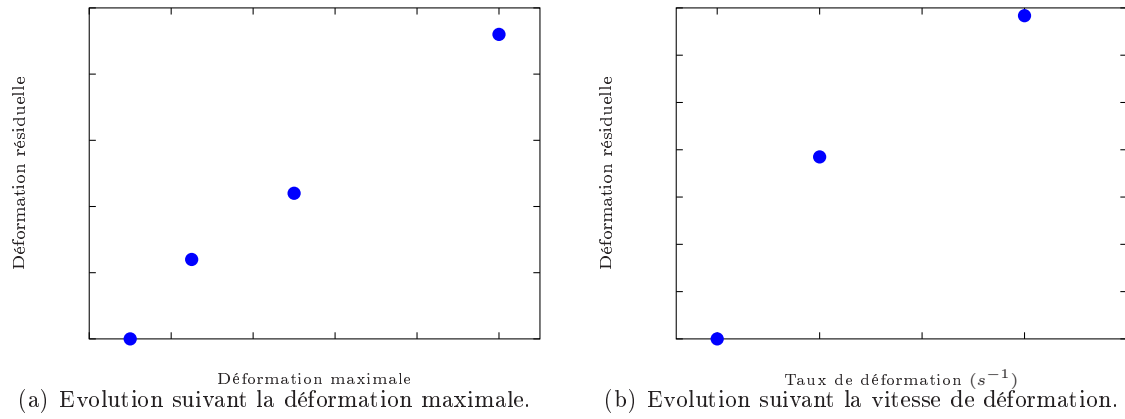


FIGURE III.18 – Observation de l'évolution de la déformation résiduelle suivant l'amplitude maximale et la vitesse de déformation.

### III.5 Essais de double cisaillement

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats d'essais de double cisaillement. Plusieurs types de sollicitation sont proposés avec quelques remarques concernant l'influence des paramètres de ces essais. On propose alors :

- un essai de charge-décharge à basse vitesse de déformation,
- des essais de relaxation à divers échelons de déformation pour différentes températures,
- des essais cycliques sinusoïdaux et triangulaires pour différentes températures.

#### III.5.1 Charge-décharge à basse vitesse de déformation

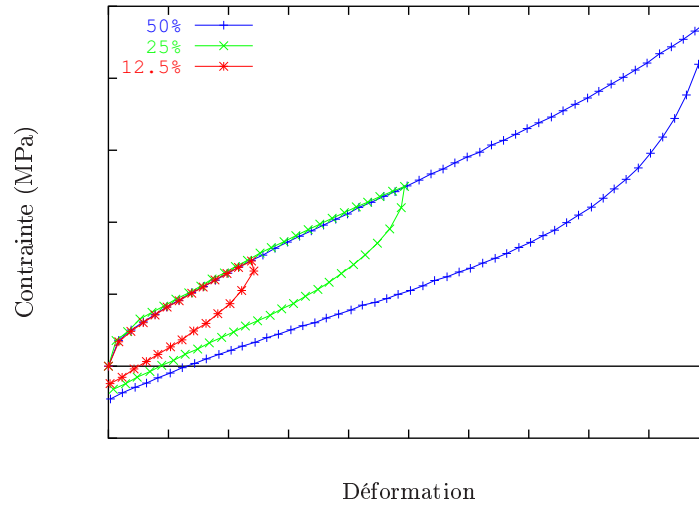


FIGURE III.19 – Essai monotone de charge-décharge à basse vitesse de déformation en double cisaillement à température ambiante ( $\dot{\gamma} = 0.03s^{-1}$ ).

**Constatactions** : L'examen des essais de charge-décharge à basse vitesse de déformation ( $\dot{\gamma} = 0.03s^{-1}$ ) pour différentes déformations ( $\gamma_{max} = 12.5\%$ ,  $25\%$  et  $50\%$ ) représentés sur la FIGURE III.19 nous renseigne sur l'évolution de la déformation résiduelle  $\gamma_p$  (valeur de la déformation exprimée lors de la décharge pour une contrainte nulle) et la contrainte résiduelle  $\sigma_p$  (valeur de la contrainte au retour à déformation nulle). Ainsi, on observe une croissance significative du module de ces grandeurs suivant l'amplitude de déformation maximale imposée (cf. TAB. III.5.1 et FIG. III.20).

$\gamma_{max}$ (%)	12.5	25	50
$\gamma_p$ (%)	C.E.	C.E.	C.E.
$\sigma_p$ (MPa)	C.E.	C.E.	C.E.

TAB. III.6 – Tableau des déformations et contraintes résiduelles suivant l'amplitude maximale de déformation.



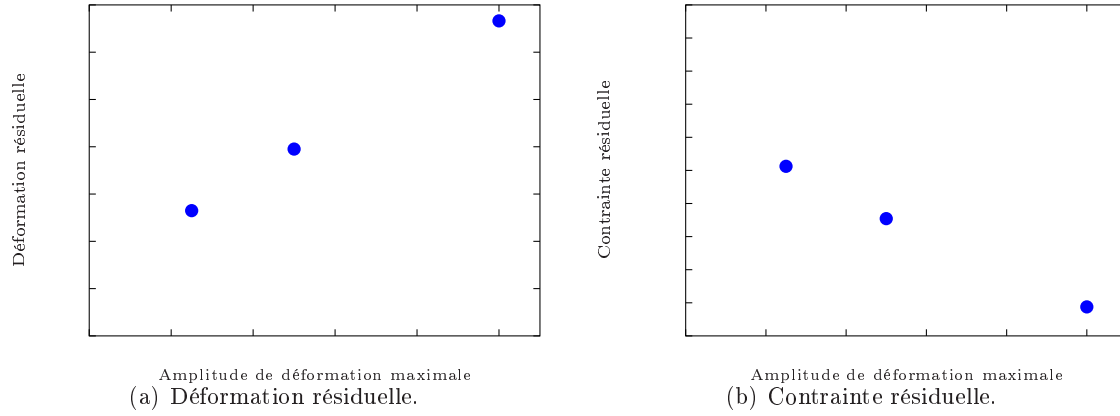


FIGURE III.20 – Evolution des déformation et contrainte résiduelles suivant l'amplitude de déformation maximale imposée.

### III.5.2 Relaxation

#### III.5.2.a Influence de l'échelon de déformation

Les essais de relaxation en double cisaillement suivent le même protocole que celui présenté au paragraphe précédent (*cf.* § III.4.3). Ainsi, plusieurs échelons de déformation ont été utilisés (*i.e.* 20%, 30% et 54%) et la vitesse de chargement en début d'essai est de  $\dot{\gamma} = 1s^{-1}$ .

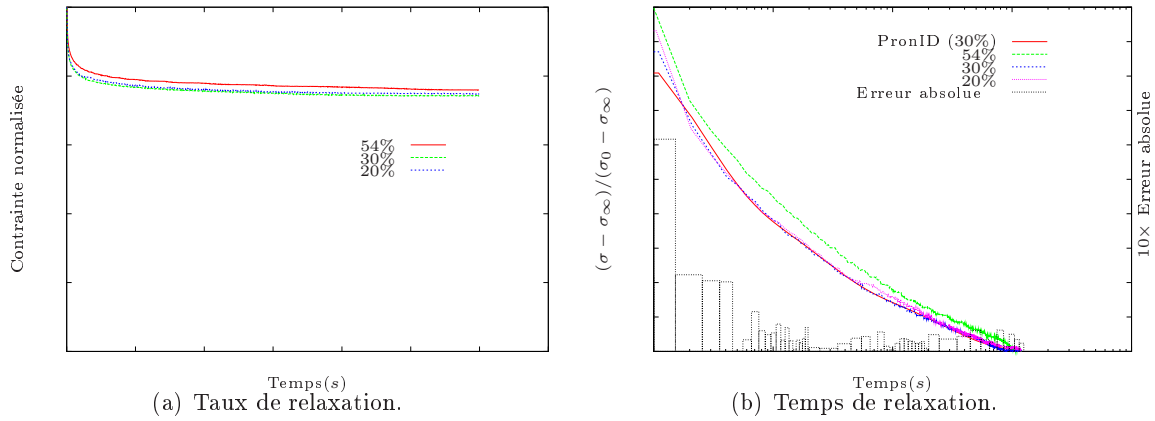


FIGURE III.21 – Résultats d'essais de relaxation en double cisaillement à température ambiante.

**Constatations**

- L'examen de la FIGURE III.21(a) et du TABLEAU III.7 permet de constater que le taux de relaxation à 1200s noté  $T_{rel}^{\infty}$  est peu dépendant de l'échelon de déformation.
- On peut aussi réaliser le même constat concernant le temps de relaxation (*cf.* FIG. III.21(b)). Trois termes de la série de PRONY sont alors nécessaires pour identifier cet essai avec une erreur relative de 0.06% calculée au sens des moindres carrés (*cf.* TAB. III.8).

$\gamma_{max} (\%)$	20	30	54
$T_{rel}^{\infty}$	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU III.7 – Taux de relaxation à 1200s suivant l'échelon de déformation en double cisaillement.

i	1	2	3
$g_i$	C.E.	C.E.	C.E.
$\tau_i$	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU III.8 – Paramètres identifiés d'une série de PRONY sur un essai de relaxation en double cisaillement.

**III.5.2.b Influence de la température**

Ici, on propose l'étude d'essais de relaxation à amplitude de déformation progressive réalisés à différentes températures. Nous proposons au lecteur une représentation schématique observable sur la FIGURE III.22. Les paramètres de l'essai sont alors fixés tels que  $\gamma_{max1} = 12.5\%$ ,  $\gamma_{max2} = 25\%$ ,  $\gamma_{max3} = 50\%$  et  $\Delta t = 60s$ .

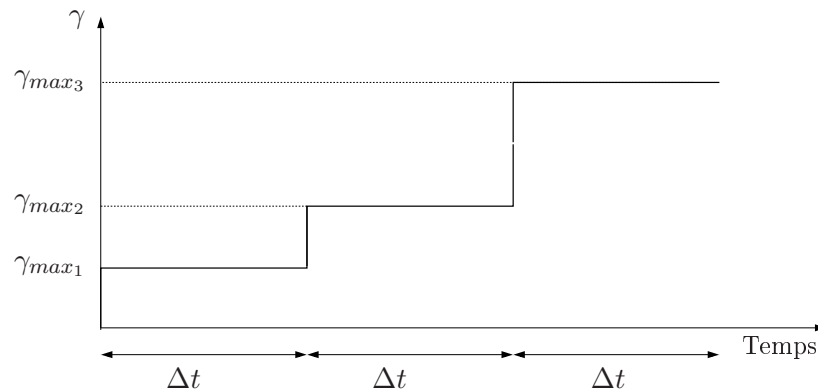


FIGURE III.22 – Représentation schématique d'un essai de relaxation à amplitude progressive.

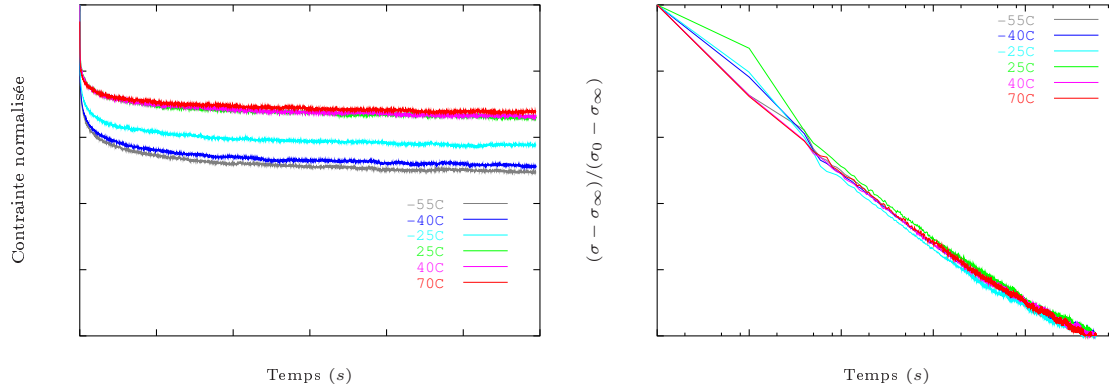
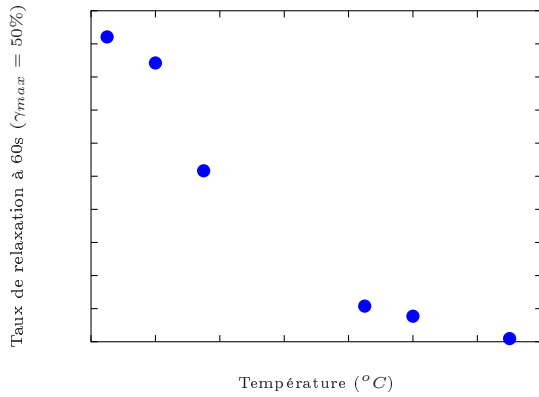


FIGURE III.23 – Evolution du taux et du temps de relaxation suivant la température en double cisaillement ( $\gamma_{max} = 50\%$ ).



Température (°C)	$\gamma_{max}$ (%)		
	12.5	25	50
-55	C.E.	C.E.	C.E.
-40	C.E.	C.E.	C.E.
-25	C.E.	C.E.	C.E.
25	C.E.	C.E.	C.E.
40	C.E.	C.E.	C.E.
70	C.E.	C.E.	C.E.

FIGURE III.24 – Evolution du taux de relaxation au bout de 60s suivant la température et différents échelons de déformation en double cisaillement.

**Constatations** : Pour effectuer l'analyse, on a extrait de l'essai de relaxation à amplitude progressive les réponses en contrainte correspondant à chaque échelon de déformation d'une durée de 60s.

- La FIGURE III.23 montre une évolution significative du taux de relaxation à 60s lorsqu'on descend dans les basses températures. En effet, on peut constater une nette évolution lorsque  $-55^\circ\text{C} \leq T \leq -25^\circ\text{C}$ , alors qu'il évolue très peu pour  $T \geq 25^\circ\text{C}$ . Ces remarques restent vraies quel que soit l'échelon de déformation (*cf.* FIG. III.24 et FIG. III.25).
- Concernant le temps de relaxation, la FIGURE III.23 illustre une faible dépendance à la température quel que soit l'échelon de déformation (*cf.* FIG. III.26).

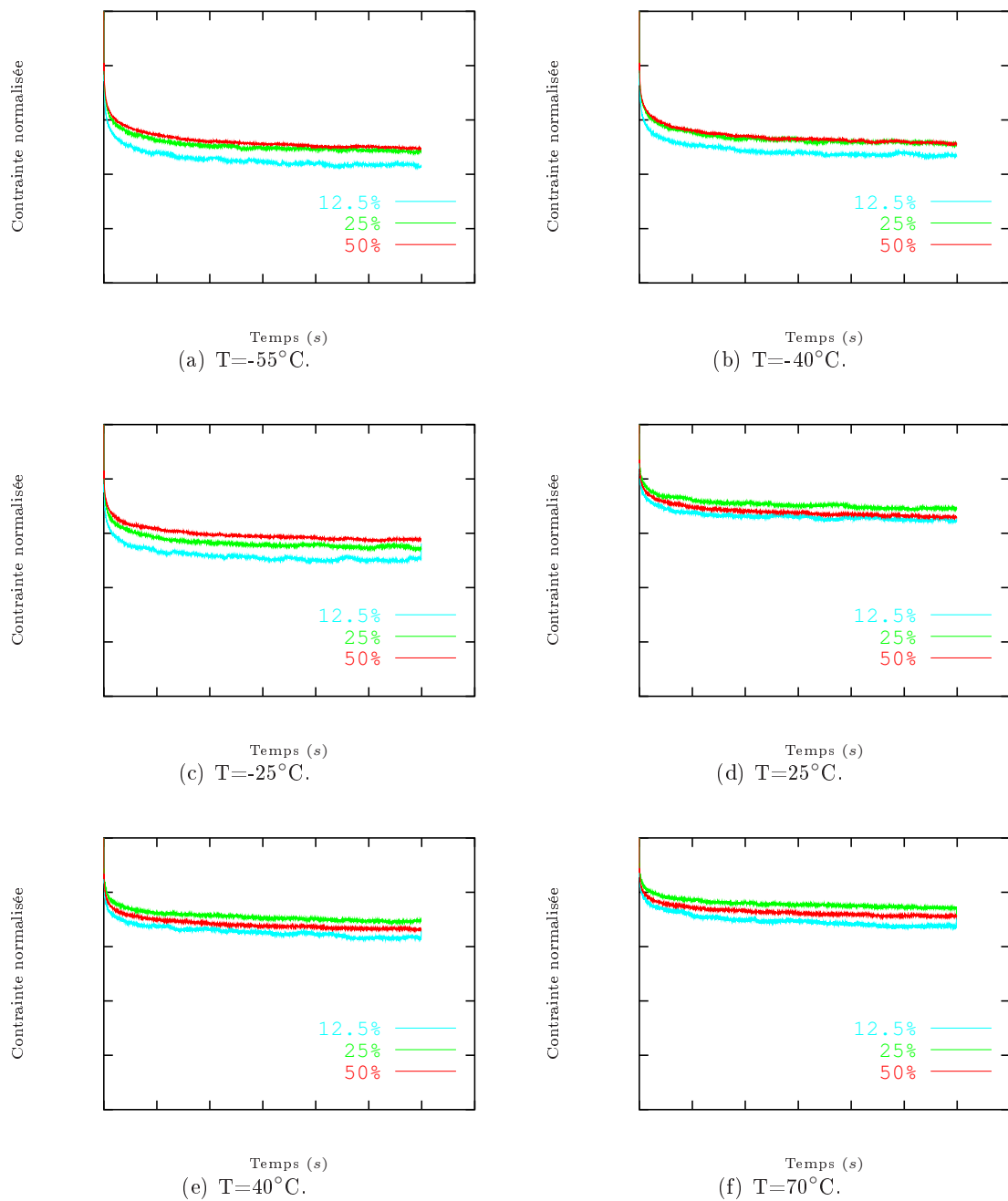


FIGURE III.25 – Observation de la contrainte normalisée à différents échelons de déformation pour différentes températures en double cisaillement.

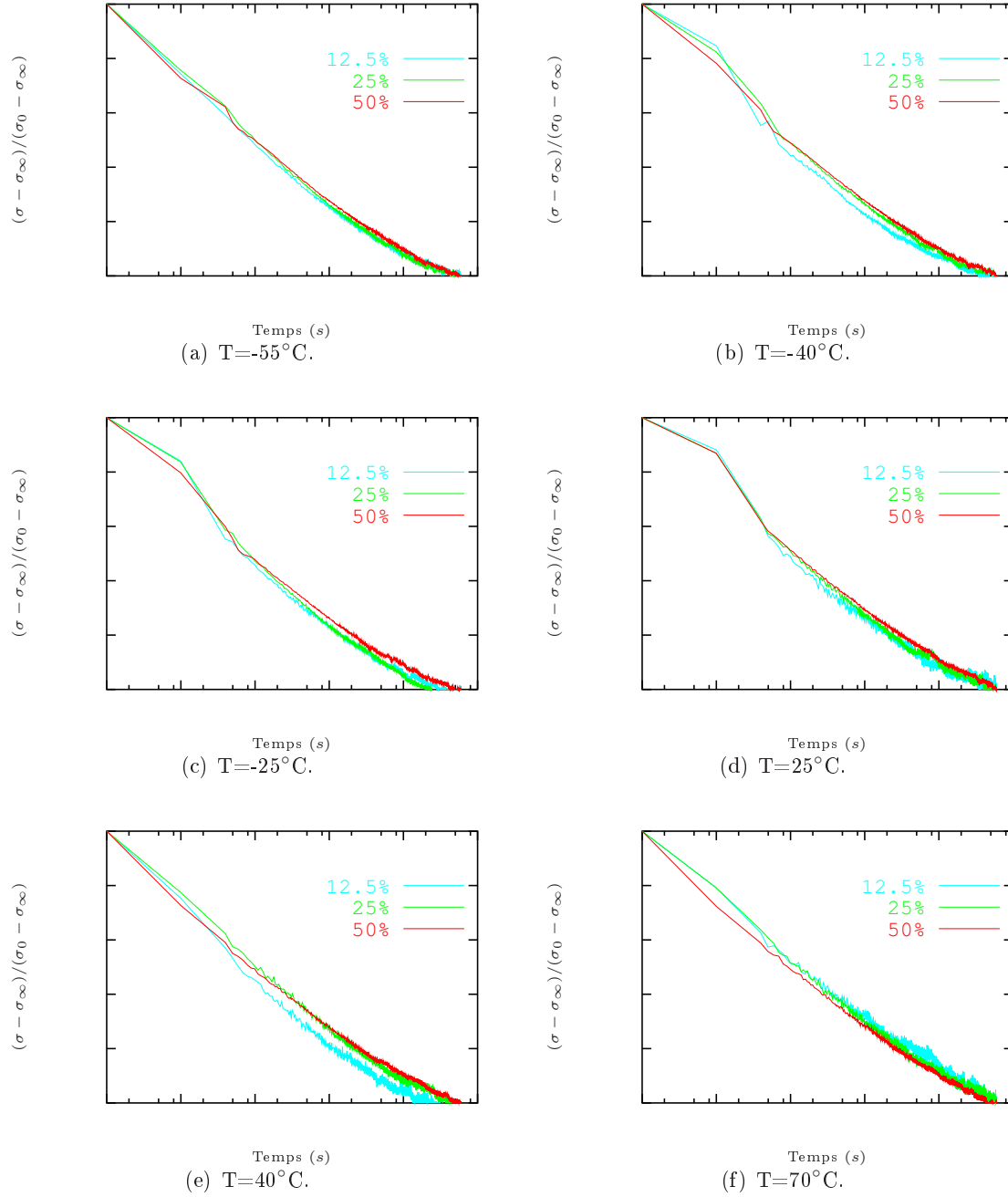


FIGURE III.26 – Observation du temps de relaxation à différents échelons de déformation pour différentes températures en double cisaillement.

### III.5.3 Essais cycliques triangulaires

Nous présentons ici les résultats d'essais cycliques triangulaires à amplitude progressive réalisés à différentes températures. Pour faciliter la compréhension, nous proposons au lecteur une représentation schématique observable sur la FIGURE III.27.

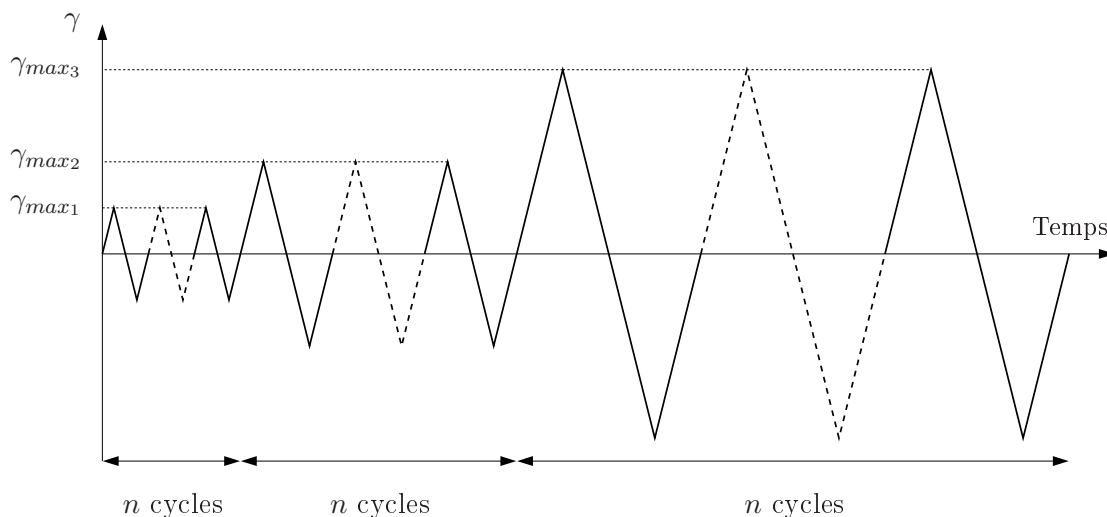


FIGURE III.27 – Représentation schématique d'un essai cyclique de type triangulaire à amplitude progressive.

Ainsi, les paramètres de réalisation de ce type d'essais sont les suivants :

- domaine de températures :  $70^{\circ}C$ ,  $40^{\circ}C$ ,  $25^{\circ}C$ ,  $-25^{\circ}C$ ,  $-40^{\circ}C$  et  $-55^{\circ}C$ ,
- domaine de taux de déformation :  $0.03s^{-1}$ ,  $0.1s^{-1}$ ,  $0.3s^{-1}$ ,  $1s^{-1}$ ,  $3s^{-1}$  et  $10s^{-1}$ ,
- domaine des déformations,  $\gamma_{max1} = 12.5\%$ ,  $\gamma_{max2} = 25\%$  et  $\gamma_{max3} = 50\%$ ,
- on réalise à chaque niveau de déformation le nombre de cycles  $n$  suffisant pour obtenir une réponse stabilisée.

Il est alors possible de déterminer la plage de fréquences moyennes dans laquelle nous nous situons (*cf.* TAB. III.9).

$\gamma_{max}$ (%)	Taux de déformation ( $s^{-1}$ )					
	10	3	1	0.3	0.1	0.03
50	5	1.5	0.5	0.15	0.05	0.015
25	10	3	1	0.3	0.1	0.03
12.5	20	6	2	0.6	0.2	0.06

TABEAU III.9 – Fréquences moyennes (Hz) associées au couple amplitude dynamique et taux de déformation pour des éprouvettes de double cisaillement.

### III.5.3.a Influence de l'amplitude de sollicitation

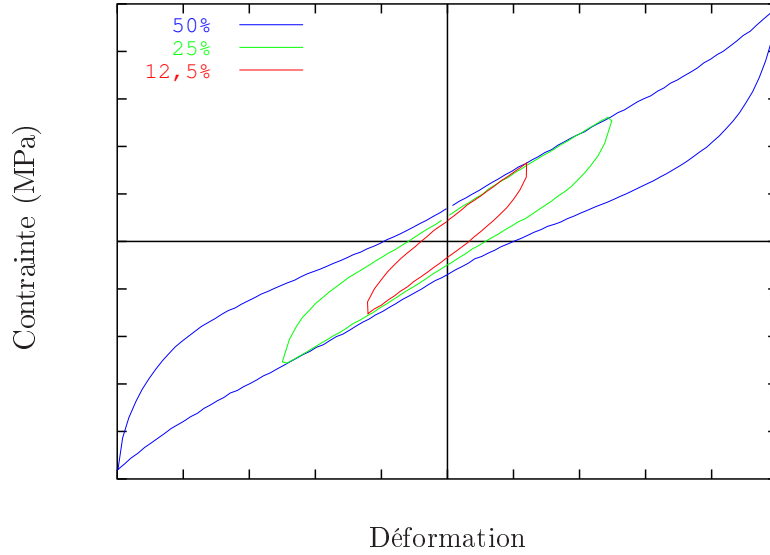


FIGURE III.28 – Observation de l'influence de l'amplitude de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement à température ambiante tels que  $\dot{\gamma} = \pm 0.3s^{-1}$ .

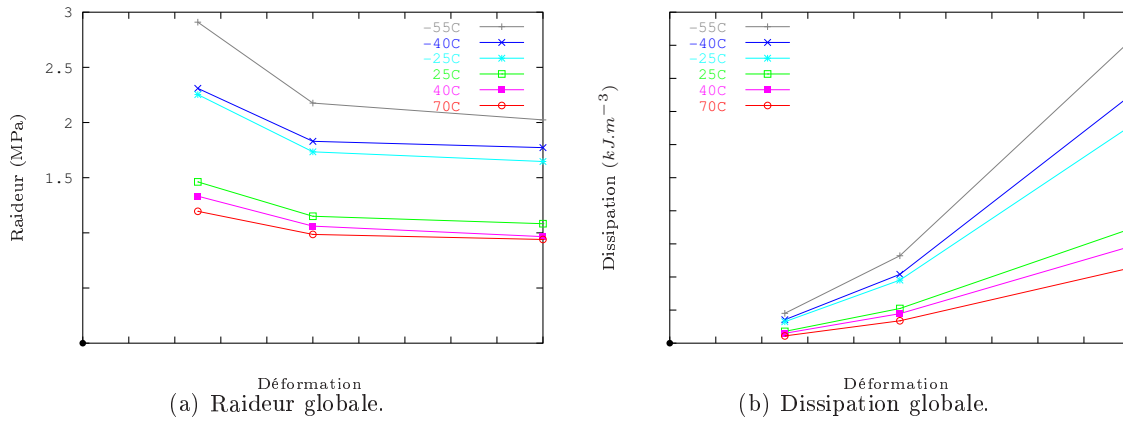


FIGURE III.29 – Evolution de la raideur et de la dissipation suivant l'amplitude de déformation pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que  $\dot{\gamma} = \pm 0.3s^{-1}$  réalisés à différentes températures.

**Constatations** : Une brève analyse de la FIGURE III.28 nous permet de mettre en avant l'influence de l'amplitude de déformation d'une sollicitation triangulaire sur la réponse de notre matériau pour un taux de déformation donné. Les FIGURES III.29(a) et III.29(b) proposent respectivement une forte rigidification globale pour les faibles amplitudes de déformation et une augmentation de la dissipation globale suivant l'amplitude de déformation. En outre, les allures non-linéaires de ces courbes se trouvent amplifiées suivant une baisse de température.

## III.5.3.b Influence du taux de déformation

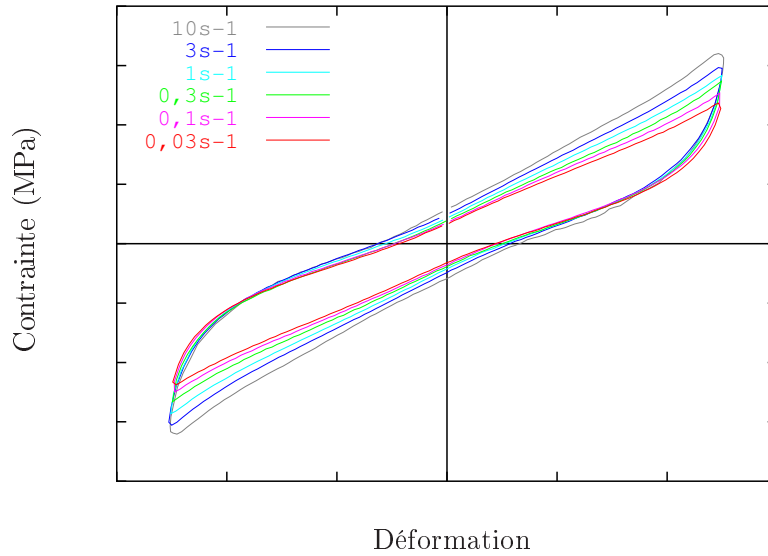


FIGURE III.30 – Observation de l'influence de la vitesse de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement à température ambiante tels que  $\gamma_{max} = 50\%$ .

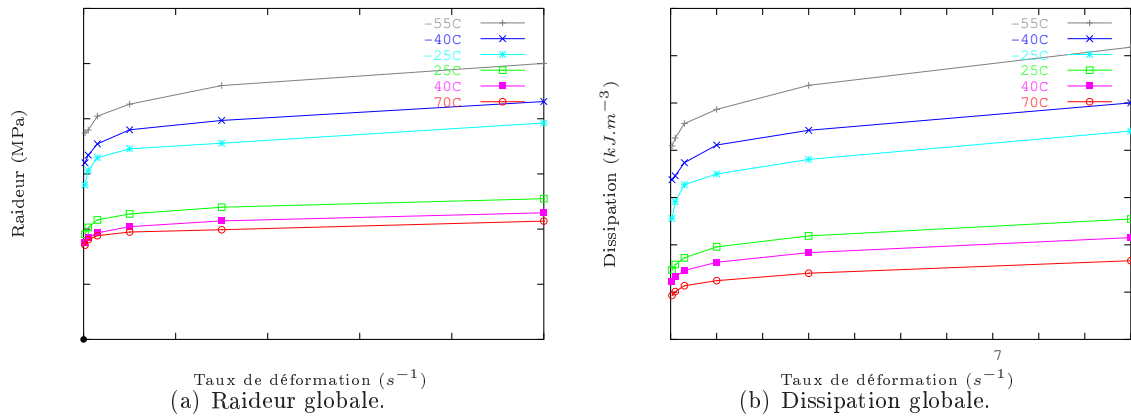


FIGURE III.31 – Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la vitesse de déformation pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que  $\gamma_{max} = 50\%$  réalisés à différentes températures.

**Constatations** : Une observation de la FIGURE III.30 nous montre l'influence de la vitesse de déformation d'une sollicitation triangulaire sur la réponse de notre matériau pour une amplitude donnée. Via l'analyse des FIGURES III.31(a) et III.31(b), on constate respectivement une rigidification globale et une augmentation de la dissipation suivant la vitesse de déformation avec la présence de fortes non-linéarités pour les vitesses les plus faibles. En outre, les allures non-linéaires de ces courbes s'atténuent suivant la température.



### III.5.3.c Influence de la température

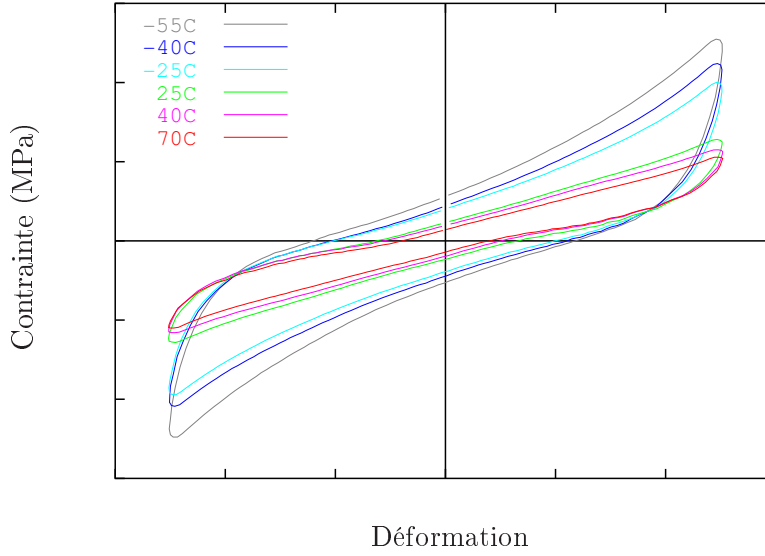


FIGURE III.32 – Observation de l'influence de la température sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que  $\gamma_{max} = 50\%$  et  $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$ .

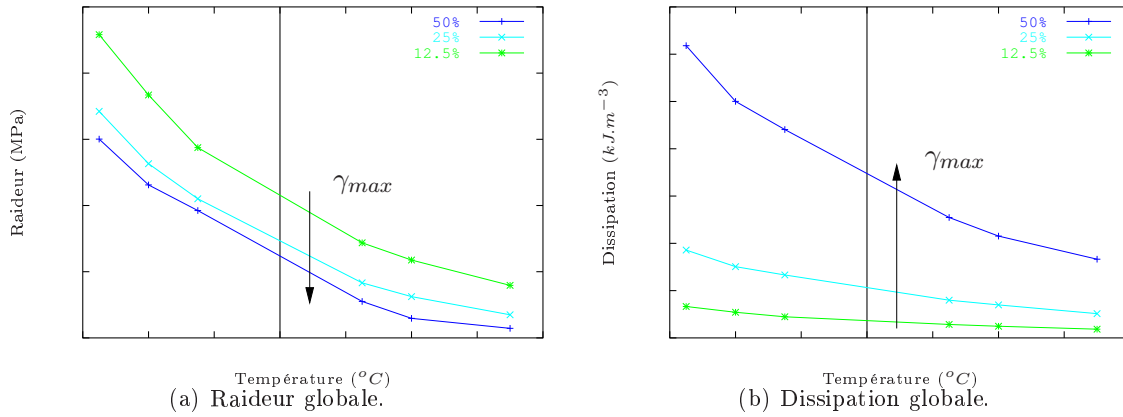


FIGURE III.33 – Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que  $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$  réalisés à différentes amplitudes de déformation.

**Constatations** : Une visualisation de la FIGURE III.32 montre l'influence importante de la température sur la réponse du matériau pour une sollicitation cyclique triangulaire donnée. On constate au regard des FIGURES III.33(a) et III.34(a) un assouplissement global suivant la température. Cette évolution est caractérisée par une allure non-linéaire qui évolue très peu suivant l'amplitude et la vitesse de sollicitation. Les FIGURES III.33(b) et III.34(b) expriment quant à elles une diminution de la dissipation suivant la température. L'évolution non-linéaire se trouve

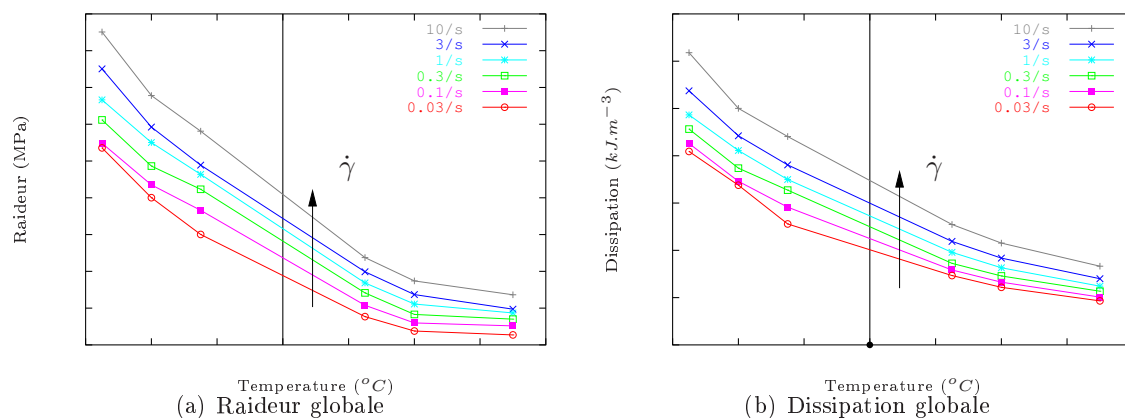


FIGURE III.34 – Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que  $\gamma_{max} = 50\%$  réalisés à différentes vitesses de déformation.

alors nettement amplifiée suivant l'amplitude de sollicitation, contrairement à celle suivant la vitesse de déformation qui conserve une allure assez proche.

#### III.5.4 Essais cycliques sinusoïdaux

Les essais cycliques présentés dans cette section sont de type sinusoïdal tels que  $\gamma(t) = \gamma_d \sin(2\pi f_r t)$ .

La FIGURE III.38 montre une représentation schématique de ce type de sollicitations. Ces essais ont été réalisés à température ambiante et nous avons utilisé comme paramètres de réalisation :

- des déformations dynamiques notées  $\gamma_d$  de 12.5%, 25% et 50%,
- des fréquences de sollicitation notées  $f_r$  de 1.5Hz, 3Hz, 6Hz, 10Hz, 15Hz et 20Hz.

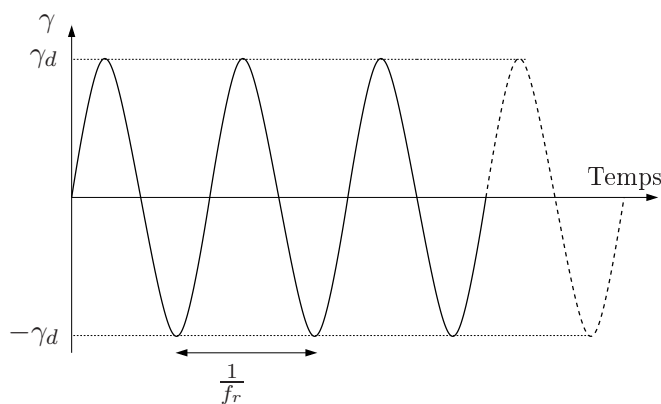


FIGURE III.35 – Représentation schématique d'un essai cyclique sinusoïdal.

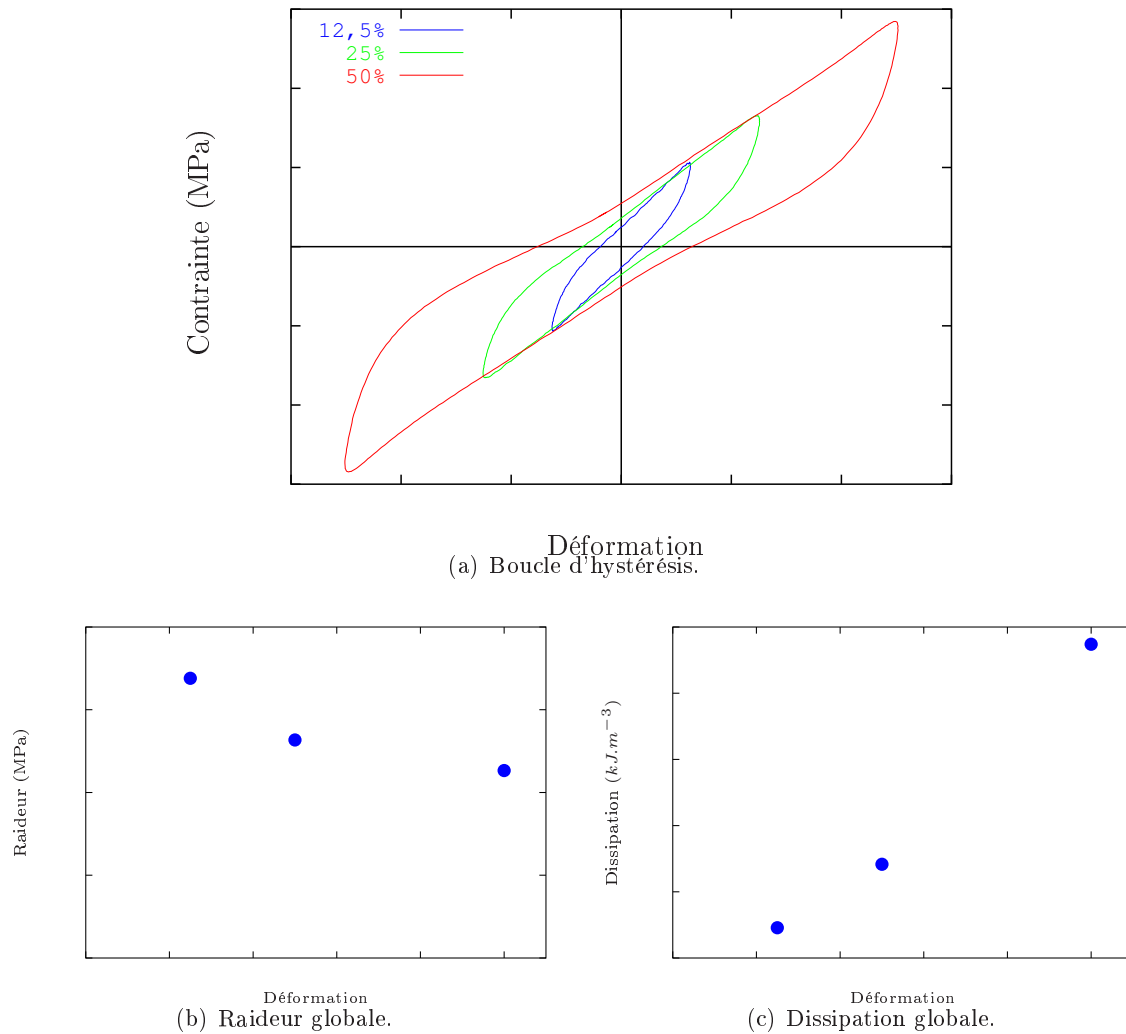


FIGURE III.36 – Observation de l'influence de l'amplitude dynamique de déformation sur les essais cycliques sinusoïdaux à température ambiante tels que  $f_r = 3Hz$ .

#### III.5.4.a Influence de l'amplitude dynamique de sollicitation

**Constatations** : Comme pour les essais cycliques triangulaires, une brève analyse de la FIGURE III.36(a) montre l'influence de l'amplitude dynamique d'une sollicitation sinusoïdale sur la réponse de notre matériau pour une fréquence donnée. Les FIGURES III.36(b) et III.36(c) nous font constater respectivement une forte rigidification pour les faibles amplitudes de déformation et une augmentation de la dissipation suivant l'amplitude dynamique.

## III.5.4.b Influence de la fréquence de sollicitation

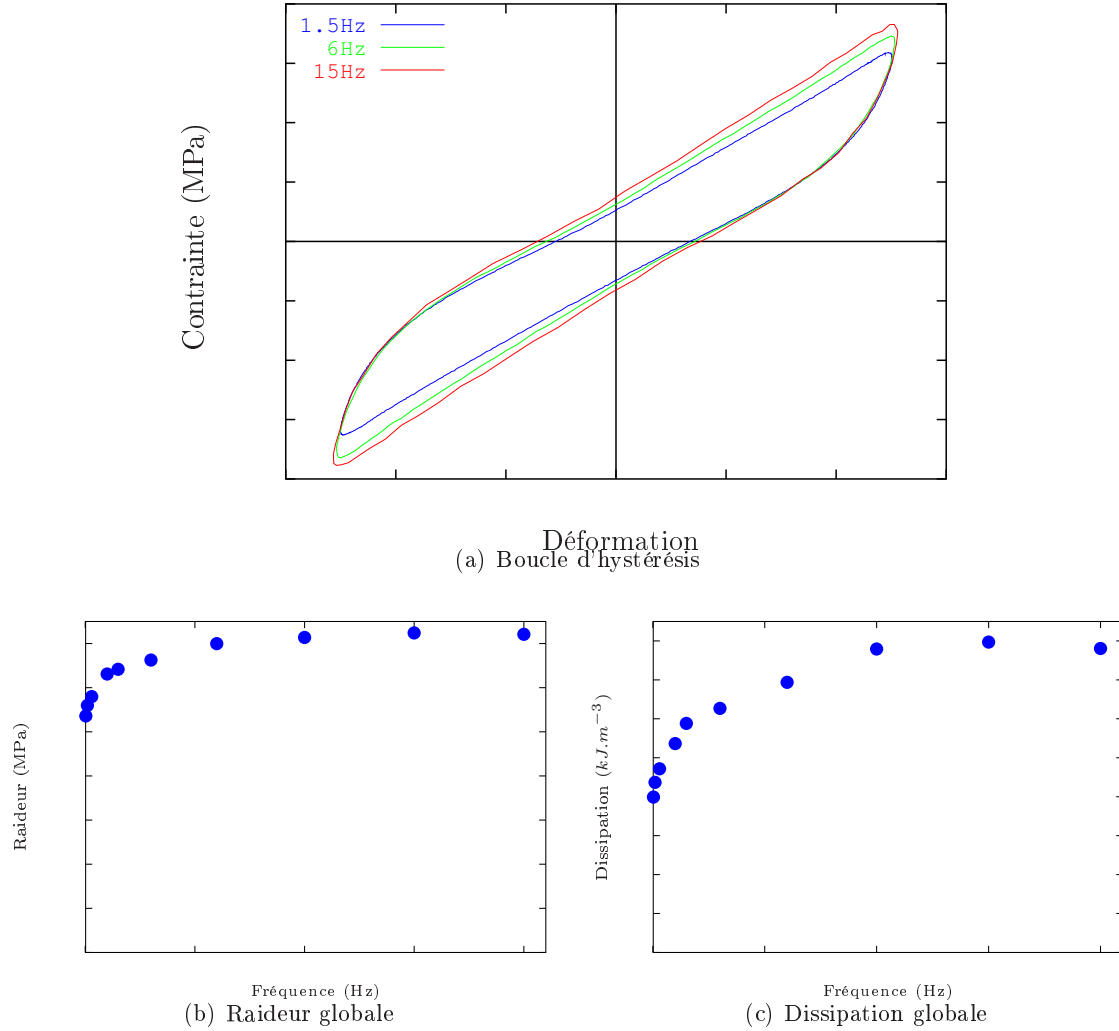


FIGURE III.37 – Observation de l'influence de la fréquence de sollicitation sur les essais cycliques sinusoïdaux à température ambiante tels que  $\gamma_d = 25\%$ .

**Constatations** : De manière analogue au paragraphe III.5.3.a, l'observation de la FIGURE III.37(a) nous montre l'influence de la fréquence de sollicitation sur la réponse de notre matériau pour une amplitude dynamique donnée. Via l'analyse des FIGURES III.37(b) et III.37(c), on constate respectivement une rigidification globale et une augmentation de la dissipation suivant la fréquence avec la présence de fortes non-linéarités pour les fréquences les plus faibles.

### III.5.4.c Exemples d'essais de sollicitations sinusoïdales plus complexes

Ces essais ont été réalisés dans l'objectif de valider les modèles de comportement développés dans les chapitres suivants. On ne réalisera donc pas une analyse fine des résultats.

#### • Essais cycliques sinusoïdaux avec pré-déformation statique

Nous présentons ici des essais cycliques sinusoïdaux associés à une pré-déformation statique. On peut exprimer ce type de sollicitation par la relation suivante :

$$\gamma(t) = \gamma_s + \gamma_d \sin(2\pi f_r t). \quad (\text{III.5})$$

Nous utiliserons comme paramètres de réalisation de ces essais :

- des déformations statiques notées  $\gamma_s$  de 12.5% et 25%,
- des déformations dynamiques de 5%, 12.5% et 25%,
- une fréquence de sollicitation de  $3Hz$ .

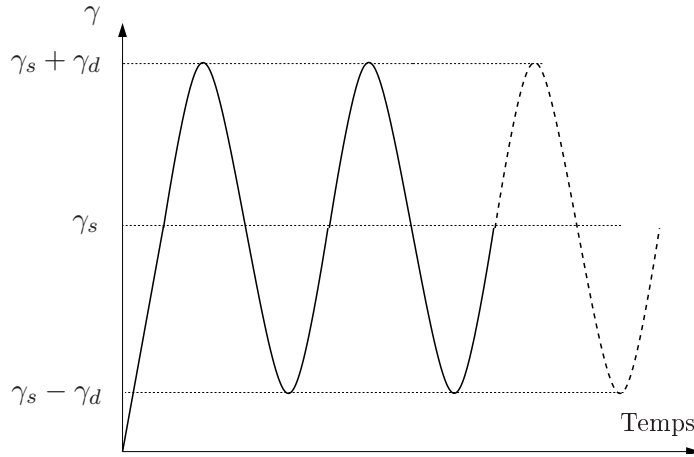


FIGURE III.38 – Représentation schématisée d'un essai cyclique sinusoïdal avec pré-déformation statique.

**Constatations** : L'examen de la FIGURE III.39 permet d'observer l'apparition d'une dissymétrie importante de la boucle d'hystérésis lors d'un essai cyclique sinusoïdal avec pré-déformation. Ce phénomène est d'autant plus important suivant la déformation statique imposée. Il est intéressant de préciser aussi que les boucles d'hystérésis ainsi formées sont centrées autour de la déformation statique et d'une valeur de contrainte, que l'on appelle alors contrainte moyenne notée  $\sigma_m$ . Cette contrainte subit un phénomène de relaxation avant de se stabiliser autour d'une certaine valeur que l'on présente dans le TABLEAU III.10. Concernant l'évolution des grandeurs caractéristiques telles que le module dynamique ou la dissipation globale suivant l'amplitude dynamique, on réalise les mêmes constats que pour les essais cycliques sinusoïdaux classiques.

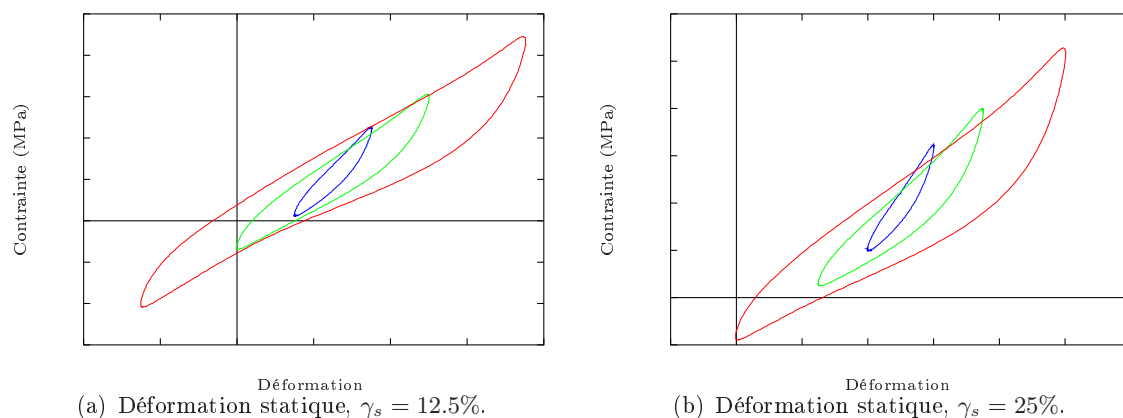


FIGURE III.39 – Observation de l'influence de l'amplitude dynamique sur des essais cycliques sinusoïdaux avec pré-déformation tels que  $f_r = 3\text{Hz}$ .

$\gamma_s$ (%)	12.5			25		
$\gamma_d$ (%)	5	12.5	25	5	12.5	25
$\sigma_m$ (MPa)	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU III.10 – Valeur de la contrainte moyenne suivant l'amplitude dynamique d'un essai cyclique sinusoïdal avec pré-déformation statique.

#### • Essais cycliques sinusoïdaux composés de plusieurs harmoniques

Nous présentons maintenant des essais cycliques sinusoïdaux composés de plusieurs harmoniques. On peut exprimer ce type de sollicitation par la relation suivante :

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{d_i} \sin(2i\pi f_r t). \quad (\text{III.6})$$

Nous utiliserons comme paramètres de réalisation de ces essais,

- des déformations dynamiques de 5%, 12.5% et 25%,
- des combinaisons d'harmoniques telles que  $f_r = 1.5\text{Hz}$ ,  $f_{r_2} = 2f_r = 3\text{Hz}$  et  $f_{r_3} = 3f_r = 4.5\text{Hz}$ .

**Constatations** : L'allure des boucles d'hystérésis en réponse à des sollicitations cycliques sinusoïdales composées de deux ou trois harmoniques est riche en phénomènes observables expérimentalement (*cf.* FIG. III.40, FIG. III.41 et FIG. III.42). Ainsi, on peut constater une association des diverses remarques réalisées précédemment : influence de la fréquence, de l'amplitude...

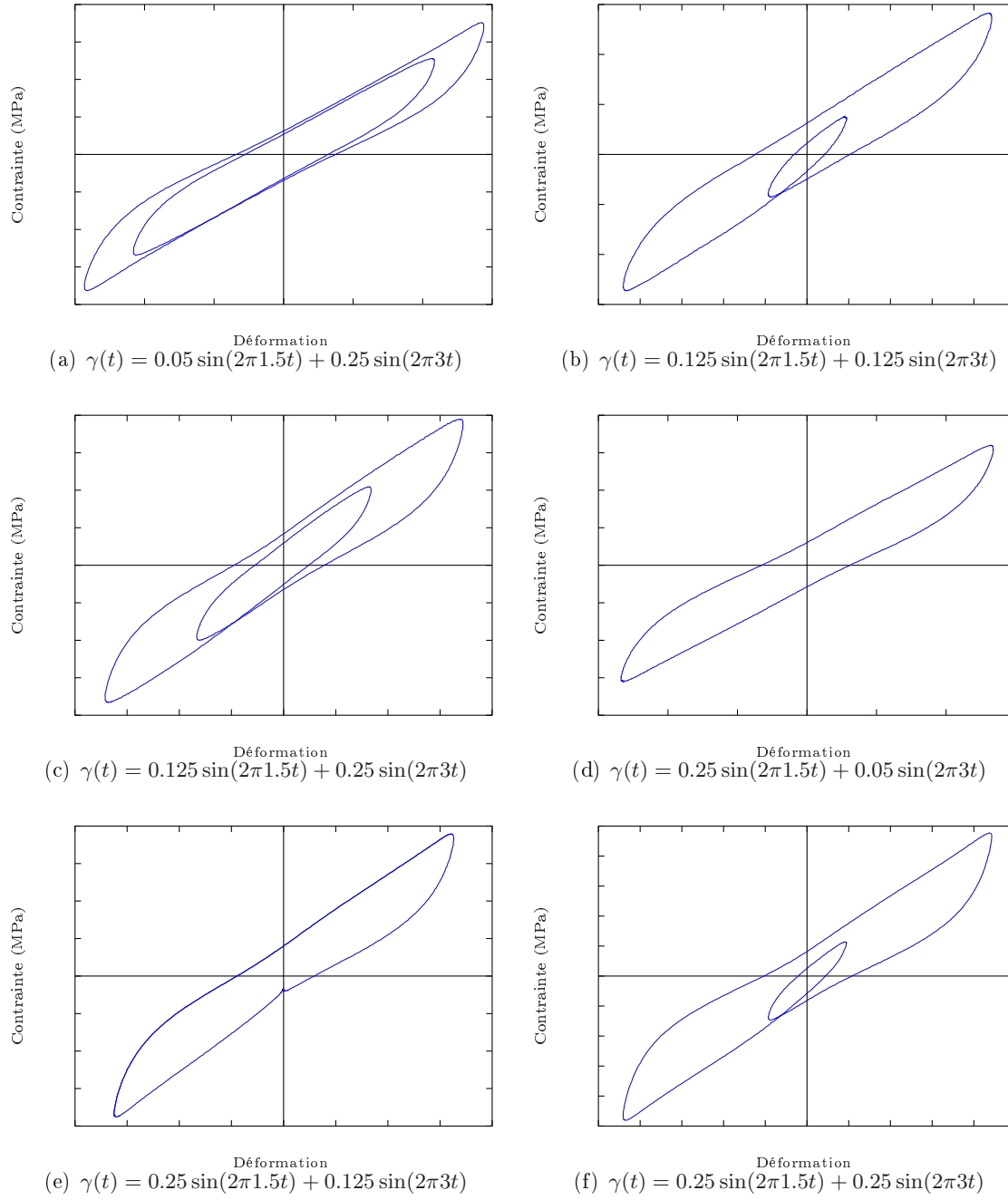


FIGURE III.40 – Observation de boucle d'hystérésis d'essais cycliques sinusoïdaux à deux harmoniques tels que  $f_r = 1.5\text{Hz}$  et  $f_{r2} = 2f_r = 3\text{Hz}$ .

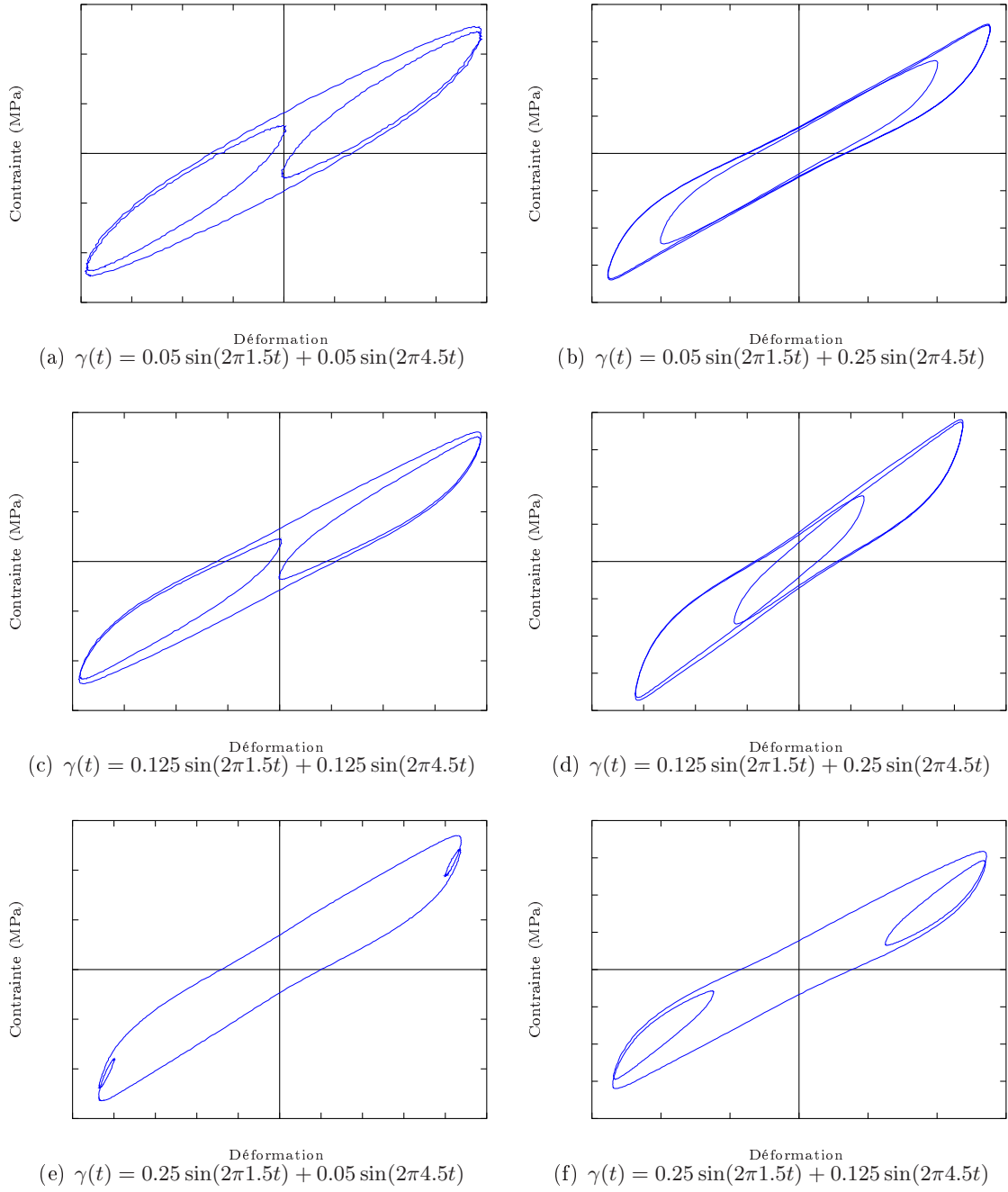


FIGURE III.41 – Observation de boucle d'hystérésis d'essais cycliques sinusoïdaux à deux harmoniques tels que  $f_r = 1.5\text{Hz}$  et  $f_{r3} = 3f_r = 4.5\text{Hz}$ .



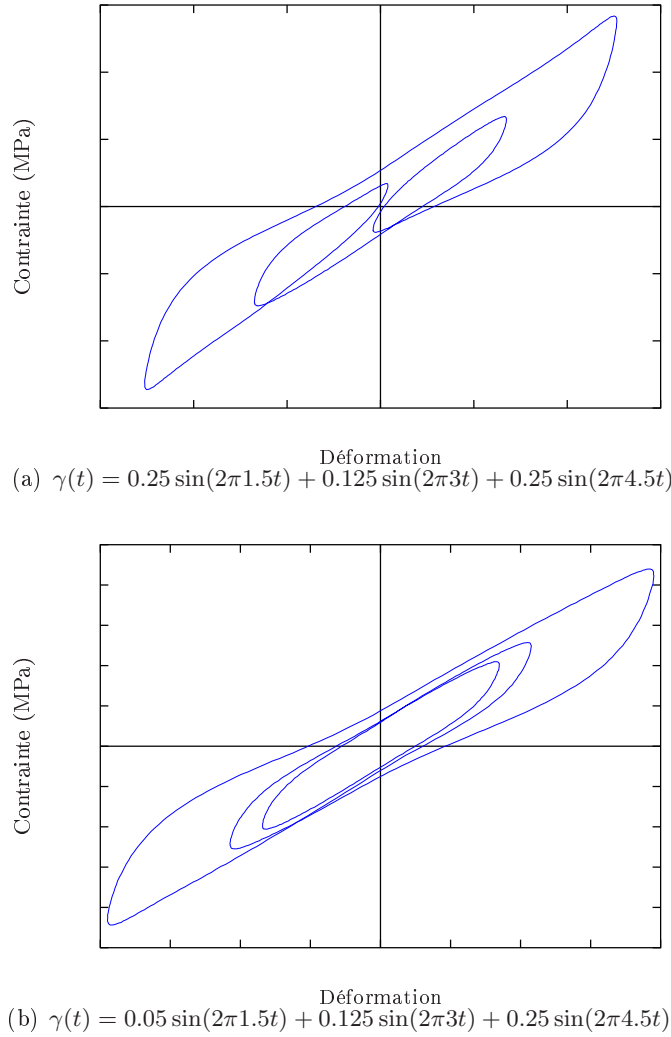


FIGURE III.42 – Observation de boucle d'hystérésis d'essais cycliques sinusoïdaux à trois harmoniques tels que  $f_r = 1.5\text{Hz}$ ,  $f_{r_2} = 2f_r = 3\text{Hz}$  et  $f_{r_3} = 3f_r = 4.5\text{Hz}$ .

Cette série d'essais permet de mettre en évidence que la réponse à un essai cyclique sinusoïdal composé de deux (ou trois) harmoniques n'est pas une combinaison simple des réponses à deux (ou trois) essais sinusoïdaux.

Pour illustrer cela, on propose d'observer la FIGURE III.43 où l'on compare la réponse stabilisée d'essai sinusoïdal composé de deux harmoniques ( $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$ ) à la combinaison de deux essais sinusoïdaux stabilisés ( $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t)$  et  $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 3t)$ ). Malgré des sollicitations en déformation semblables (*cf.* FIG. III.43(a)), on peut mettre en avant une différence notable des réponses stabilisées (*cf.* FIG. III.43(b)) qui se traduit par des boucles d'hystérésis dont l'allure est très éloignée l'une de l'autre (*cf.* FIG. III.43(c)).

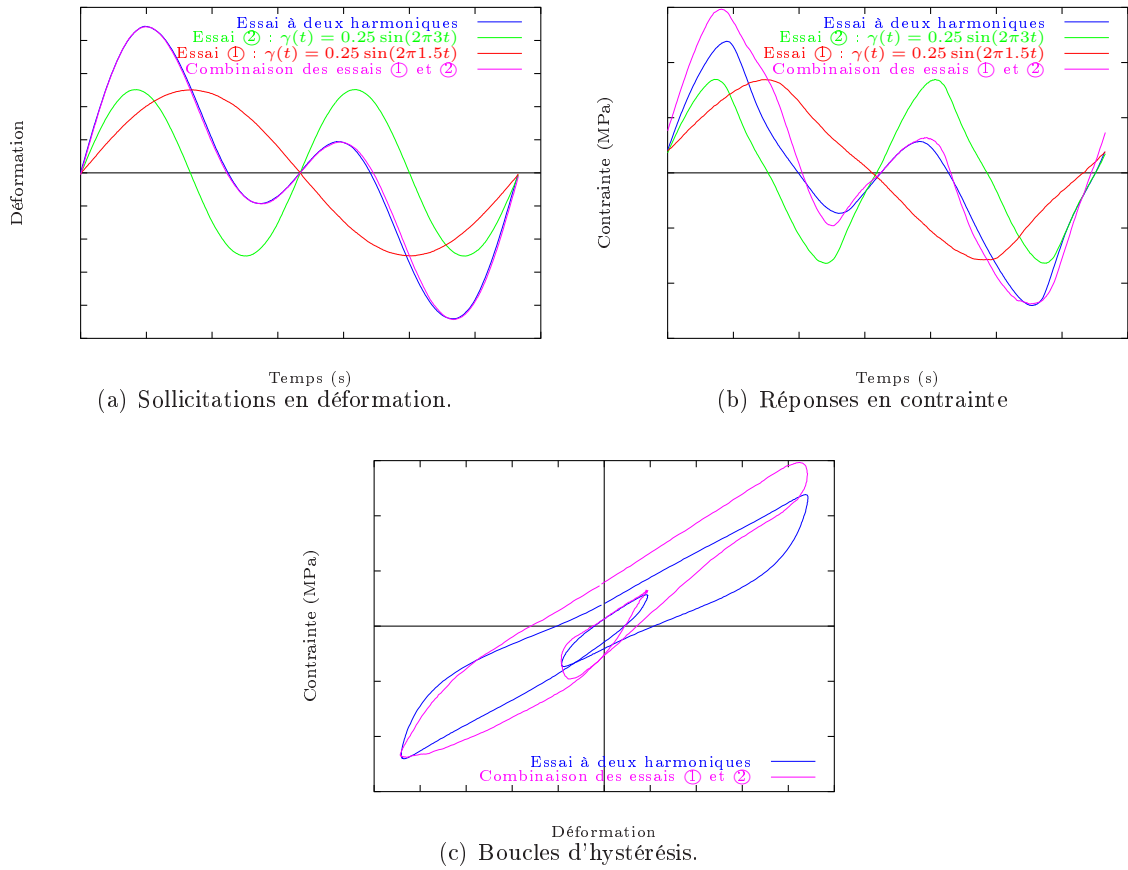


FIGURE III.43 – Comparaison des résultats d'un essai cyclique sinusoïdal à deux harmoniques tel que  $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$  et de ceux obtenus par combinaison de deux essais cycliques sinusoïdaux  $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t)$  et  $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 3t)$ .

### III.6 Conclusion

Cette campagne d'essais en traction uniaxiale et en double cisaillement a permis de mettre en évidence les paramètres influant la réponse de l'élastomère silicone VHDS 1029 pour divers types de chargements. Ainsi, on a pu montrer les effets de divers facteurs comme le temps d'observation, le temps de sollicitation, la déformation maximale ou l'amplitude de déformation et la température sur la réponse du matériau.

#### • Influence du paramètre temps

L'influence du paramètre temps a été constaté dès les premiers pas de l'industrie du caoutchouc par C. GOODYEAR en 1855, et se manifeste de deux manières distinctes :

- une dépendance au temps d'observation : on parle alors de relaxation en contrainte suivant des temps caractéristiques associés à des taux de relaxation. L'analyse présentée aux paragraphes III.4.3 et III.5.3 met en avant ce phénomène pour le matériau étudié,
- une dépendance au temps de sollicitation : dans ce cas, le comportement est fonction de la vitesse de chargement. Les essais cycliques observés aux paragraphes III.5.3.b et III.5.4.b montrent l'influence de ce paramètre d'essais sur la réponse du matériau étudié.

En introduisant la notion de régimes dynamiques, les auteurs DRAGON *et al.* [2000] proposent le classement suivant :

- lent ou quasi-statique ( $1 - 10s^{-1}$ , par exemple une chute),
- moyen ( $10 - 1000s^{-1}$ , par exemple un crash),
- rapide ( $> 10^4s^{-1}$ , par exemple un impact ou un choc thermique)

Le régime dynamique dans lequel nous nous plaçons traite des sollicitations lentes pour lesquelles les effets d'inertie sont négligeables par rapport aux autres chargements.

Lorsqu'on parle d'évolution suivant le temps de sollicitation, on rencontre la plupart du temps des observations réalisées à partir d'une évolution en fréquence. On représente ainsi les évolutions des grandeurs caractéristiques telles que le module de rigidité et l'angle de perte ou la dissipation en fonction de la fréquence comme le propose la FIGURE III.44. Il s'agit bien évidemment d'une représentation schématique dépendant fortement de l'amplitude du chargement. La forme des courbes reste néanmoins similaire pour tous les élastomères.

Via l'allure des courbes, on peut réaliser quelques constatations. A basse fréquence, le module de rigidité est faible jusqu'à atteindre une valeur limite que SAAD [2003] appelle la raideur "statique<sup>(4)</sup>". En revanche à haute fréquence, il devient important et tend vers une valeur asymptotique. Entre ces deux zones, il existe une fréquence de transition pour laquelle l'amortissement est maximal et près de laquelle l'angle de perte et le module de rigidité varient fortement.

---

(4). Dans le cas particulier où le matériau est un fluide cette raideur statique est nulle.

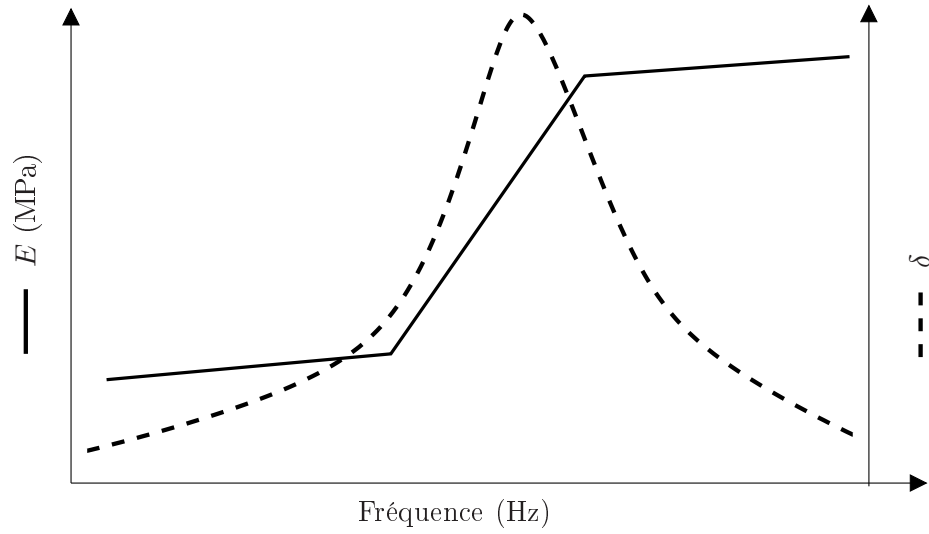


FIGURE III.44 – Représentation schématique de l'évolution du module de rigidité et de l'angle de perte en fonction de la fréquence (Echelle logarithmique en fréquence).

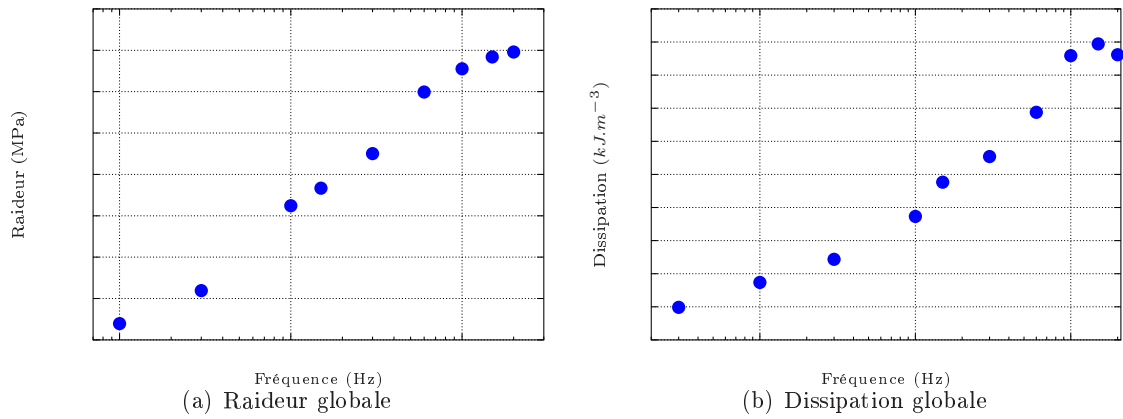


FIGURE III.45 – Observation de l'influence de la fréquence de sollicitation sur les essais cycliques sinusoïdaux à température ambiante tels que  $\gamma_d = 25\%$  (Echelle logarithmique en fréquence).

Pour illustrer cette dépendance en fréquence, nous proposons d'éclairer le lecteur en représentant suivant une échelle logarithmique l'évolution des grandeurs caractéristiques  $\Upsilon$  et  $\Phi_{/cycle}$  pour une sollicitation cyclique sinusoïdale en double cisaillement telle que  $\gamma_d = 25\%$ . L'examen des FIGURES III.45(a) et III.45(b) permet alors de nous situer dans un domaine placé à la frontière de la zone de basse fréquence et celle de transition.

### • Influence des paramètres déformation maximale et amplitude dynamique

La lecture des paragraphes III.4.3.a, III.5.3.a et III.5.4.a, montre que notre matériau comme tous les élastomères chargés présente un comportement dissipatif qui dépend de l'amplitude de chargement. De nombreux auteurs ont observé expérimentalement et commenté ce phénomène. Le degré de dépendance en amplitude varie en fonction du type et de la quantité de charges. Les premières explications ont été fournies par PAYNE en 1965. De manière générale, la littérature [LION, 1998 ; BRACKBILL *et al.*, 2000 ; SJÖBERG, 2002 ; SAAD, 2003] nous propose les constats suivants :

- la raideur globale diminue suivant l'amplitude de sollicitation. La diminution de la rigidité en fonction de l'amplitude de sollicitation, appelée souvent "Effet PAYNE" (*cf.* § I.5) est nettement lisible au travers de la FIGURE III.46(a),
- l'amortissement augmente dans un premier temps suivant l'amplitude puis diminue (*cf.* FIG. III.46(b)). L'augmentation de la surface de l'hysteresis est due à l'adjonction de charges renforçantes qui entraîne l'ajout d'un frottement à l'interface matrice/charge et charge/charge jusqu'à endommagement (décohésion, cavitation).

Pour pallier la pauvreté du nombre de points expérimentaux que nous présentons pour décrire l'influence de l'amplitude dynamique sur notre matériau, nous proposons alors d'observer les résultats d'une campagne d'essais réalisés par notre partenaire industriel (EUROCOPTER) sur un élastomère silicone utilisé pour une ancienne génération d'adaptateurs de fréquence.

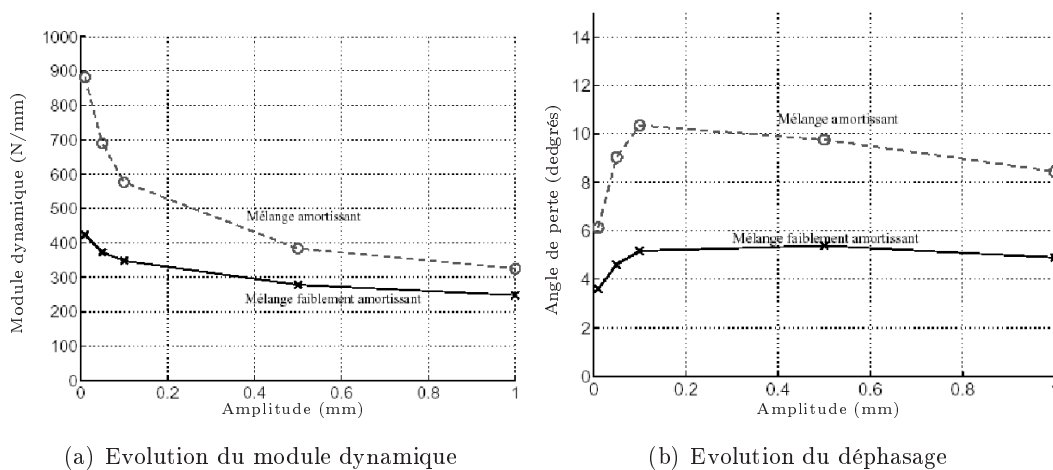


FIGURE III.46 – Variation du module dynamique et du déphasage en fonction de l'amplitude d'excitation sinusoïdale, pour deux mélanges. Cas d'un essai de cisaillement à 20 Hz extrait de [SAAD, 2003].

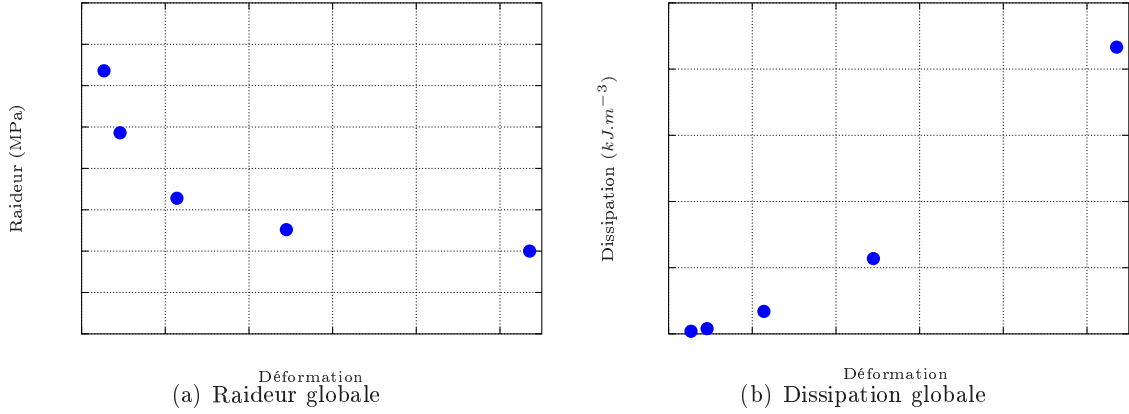


FIGURE III.47 – Observation de l'influence de l'amplitude sur un élastomère silicone utilisé pour une ancienne génération d'adaptateurs de fréquence (Sollicitation sinusoïdale en double cisaillement de fréquence 10Hz à  $T = 25^{\circ}\text{C}$ )

#### • Influence du paramètre température

GOUGH [1803] fut le premier scientifique à observer que le comportement des élastomères dépend de la température. En effet, il a constaté le résultat expérimental suivant : une bande de caoutchouc vulcanisé sous contrainte se rétracte de façon réversible sous l'effet de la chaleur. Comme nous avons pu le constater tout au long du CHAPITRE I, la température est un facteur influant sur la réponse des élastomères. Plus la température augmente, plus les vibrations moléculaires sont importantes et plus les molécules peuvent bouger librement.

L'influence de la température sur la réponse du matériau décrite aux paragraphes III.4.3.a, III.5.2.b et III.5.3.c est cohérente avec les remarques concernant l'état de la matière des polymères amorphes présentés au paragraphe I.3 et l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant la température vu au paragraphe II.1.2.b. Le domaine de température considéré allant de  $70^{\circ}\text{C}$  à  $-55^{\circ}\text{C}$ , nous nous déplaçons bel et bien de l'état caoutchoutique vers sa frontière avec l'état de transition où l'on peut observer une augmentation du module de rigidité.

Une comparaison de l'évolution du module de rigidité et de l'angle de perte suivant la fréquence (cf. FIG. III.44) à celle fonction de la température (cf. FIG. I.4), nous permet de constater qu'une augmentation de température est équivalente à une diminution de fréquence d'un point de vue phénoménologique. Cette caractéristique appelée "principe de superposition temps-température (ou fréquence-température)", est valable pour un grand nombre d'élastomères sur des domaines de températures et fréquences importants [FERRY, 1970]. On considère dans ce cas que l'effet de la température sur les propriétés mécaniques est identique sur l'échelle des fréquences à un facteur multiplicatif près.

Dans ces conditions, on peut lier l'évolution du module de rigidité et du facteur de perte pour

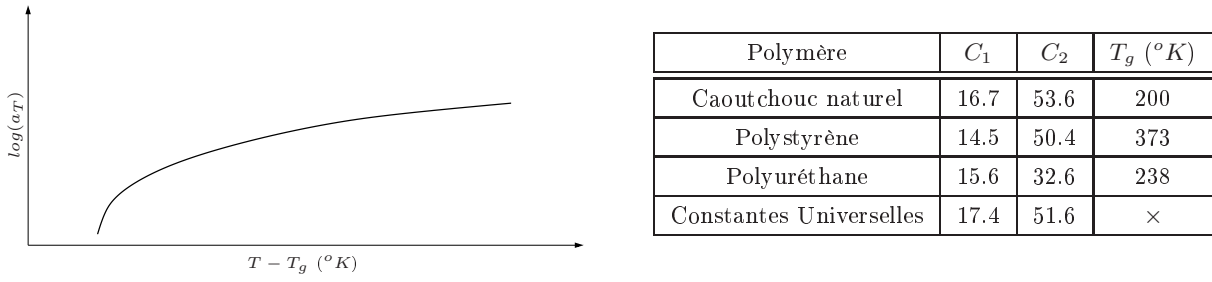


FIGURE III.48 – Evolution schématique d'une loi WLF pour un polymère et table de paramètres suivant le matériau issue de [BIKARD, 2002].

une variation de température de  $T_0$  à  $T$  par une dilatation du temps :

$$\begin{cases} E(T_0, t) = \frac{\rho(T_0)T_0}{\rho(T)T} E\left(T, \frac{t}{a_T}\right), \\ \tan(\delta(T_0, t)) = \tan\left(\delta\left(T, \frac{t}{a_T}\right)\right), \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

où  $a_T$ , appelé facteur de décalage en temps (ou en fréquence) est un coefficient multiplicateur dépendant de la température. Ainsi, on peut construire des courbes "maîtresses" du matériau permettant d'obtenir une évaluation des grandeurs caractéristiques sur une large gamme de fréquence à partir d'essais dans une gamme de fréquence donnée à différentes températures.

Plusieurs formes de fonctions d'approximation de  $a_T$  sont utilisées dans la littérature dont la plupart sont décrites dans [WARD et SWEENEY, 2004]. Les deux lois les plus employées sont les suivantes :

- la loi WLF (WILLIAMS, LANDEL et FERRY) :

$$\log(a_T) = \frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)}, \quad (\text{III.8})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes positives telles que  $T - T_0 > -C_2$  sur la plage de température considérée. FERRY énonce alors que lorsqu'on remplace  $T_0$  par la température de transition vitreuse, on obtient des constantes universelles. Cette équation a été développée pour une large base de donnée de polymères incluant plusieurs élastomères (*cf.* FIG. III.48).

- la loi d'ARRHENIUS :

$$\log(a_T) = \frac{\Delta H_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (\text{III.9})$$

où  $R$  est la constante des gaz parfait et  $\Delta H_a$  est une énergie d'activation apparente.

Pour bilan, l'équivalence temps-température induit que la réponse d'un polymère est la même dans les deux cas suivants :

- à faible température et longs temps de sollicitation (*i.e.* basses fréquences),
- à haute température et temps de courte durée (*i.e.* hautes fréquences).

---

- Hypothèses sur le comportement du matériau

Pour prendre en compte toutes ces observations expérimentales dans nos développements, nous allons donc émettre quelques hypothèses sur le comportement de notre matériau pour la suite de l'étude. Ainsi, les divers aspects considérés seront les suivants :

- élastique non-linéaire nécessitant un formalisme mécanique en grandes déformations et la prise en compte d'un caractère **hyperélastique** typique des élastomères.
- élasto-dissipatif non-linéaire suivant le temps de sollicitation, l'amplitude de déformation ou la déformation maximale et la température ; d'un point de vue microstructural, ce phénomène est principalement dû à un réarrangement moléculaire au niveau de la structure interne du matériau. On peut alors observer un glissement aux interfaces générant une perte d'énergie par :
  - viscosité : frottement entre chaînes macromoléculaires,
  - plasticité : frottement aux interfaces charge-charge et charge-matrice,
  - décohésion, rupture et cavitation : effets d'endommagement.





---

## Matériaux à comportement hyperélastique

**O**n utilise généralement les élastomères pour leur grande faculté de déformation. Cependant, cette capacité entraîne de fortes non-linéarités des contraintes par rapport aux déformations et un dépassement du cadre classique des petites déformations.

Dans ce chapitre, on se place sous l'hypothèse d'un matériau isotrope non dissipatif dont les propriétés sont décrites par une densité d'énergie de déformation dans le cas d'une transformation isotherme. On présente ainsi un éventail non exhaustif des modèles caractérisant l'hyperélasticité dont certains seront confrontés dans une campagne d'identification menée sur le matériau de l'étude.

## PLAN DU CHAPITRE IV

---

<b>IV.1 Principales notations utilisées . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>IV.2 Généralités : écriture du comportement élastique . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>IV.3 Loi de comportement hyperélastique . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>IV.4 Matériau incompressible . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>IV.5 Modélisation des énergies de déformation . . . . .</b>	<b>88</b>
IV.5.1 Approches statistiques . . . . .	88
IV.5.2 Modèles phénoménologiques . . . . .	89
IV.5.2.a Modèles classiques . . . . .	89
IV.5.2.b Autres modèles . . . . .	90
<b>IV.6 Identification des caractéristiques hyperélastiques . . . . .</b>	<b>91</b>
IV.6.1 Etude analytique . . . . .	91
IV.6.2 Résultats d'identification . . . . .	92
IV.6.2.a Problématique d'identification sur un chargement donné . . . . .	93
IV.6.2.b Identification couplée en traction uniaxiale et en double cisaillement . . . . .	94
IV.6.2.c Conditions d'admissibilité thermodynamique et de stabilité matérielle . . . . .	96
<b>IV.7 Conclusion . . . . .</b>	<b>100</b>

---

## IV.1 Principales notations utilisées

Dans ce chapitre, nous utiliserons les notations décrites dans le TABLEAU IV.1 et définies en ANNEXE A.

Symbole	Nom	Commentaires
$d\vec{X}$	Vecteur élémentaire dans la configuration initiale	
$d\vec{x}$	Transformé de $d\vec{X}$ dans la configuration actuelle	
$\bar{\bar{F}}$	Tenseur gradient de la transformation	$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}$ et $J = \det(\bar{\bar{F}}) > 0$
$\bar{\bar{C}}$	Tenseur de CAUCHY-GREEN droit	$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}}$
$\bar{\bar{E}}$	Tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE	$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{1}})$
$\bar{\bar{B}}$	Tenseur de CAUCHY-GREEN gauche	$\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^T$
$\bar{\bar{A}}$	Tenseur des déformations d'EULER-ALMANZI	$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{B}}^{-1})$
$\bar{\bar{\sigma}}$	Tenseur des contraintes de CAUCHY	Description eulérienne
$\bar{\bar{\pi}}$	Premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF	Description mixte, $\bar{\bar{\pi}} = J\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}$
$\bar{\bar{S}}$	Second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF	Description lagrangienne, $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}}$
$\bar{\bar{D}}$	Tenseur taux des déformations	$\bar{\bar{D}} = \left( \dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} \right)_{sym}$
$\widehat{W}$	Potentiel thermodynamique	
$\widehat{\psi}$	Energie libre spécifique de HELMHOLTZ	
$\widehat{Q}$	Densité volumique d'énergie libre	$\widehat{Q} = \rho\widehat{\psi}$

TABLEAU IV.1 – *Présentation des principales notations utilisées au CHAPITRE IV.*

## IV.2 Généralités : écriture du comportement élastique

Pour déterminer l'évolution d'un système déformable, il est nécessaire d'établir une relation entre contrainte et déformation : la loi de comportement. Dans le cas général sous l'hypothèse de l'état local défini au paragraphe ANNEXE A.3, cette loi prend la forme d'une fonctionnelle "histoire des déformations" traduisant que la contrainte en un point à l'instant  $t$  dépend de l'histoire des déformations subies par le matériau en ce point jusqu'à cet instant. Elle doit en outre obéir aux critères suivants :

- le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle : la loi de comportement doit être invariante par tout changement de référentiel,
- la compatibilité avec les systèmes matériels : dans le cas d'un matériau isotrope, la loi de comportement doit être invariante dans toute rotation de la configuration de référence.

Cette loi traduit le comportement physique du matériau considéré et dépend de sa nature. Il est possible en grandes déformations d'écrire une loi de comportement élastique de trois manières plus ou moins liées mais toutes équivalentes en petites déformations : l'une élastique dite de CAUCHY

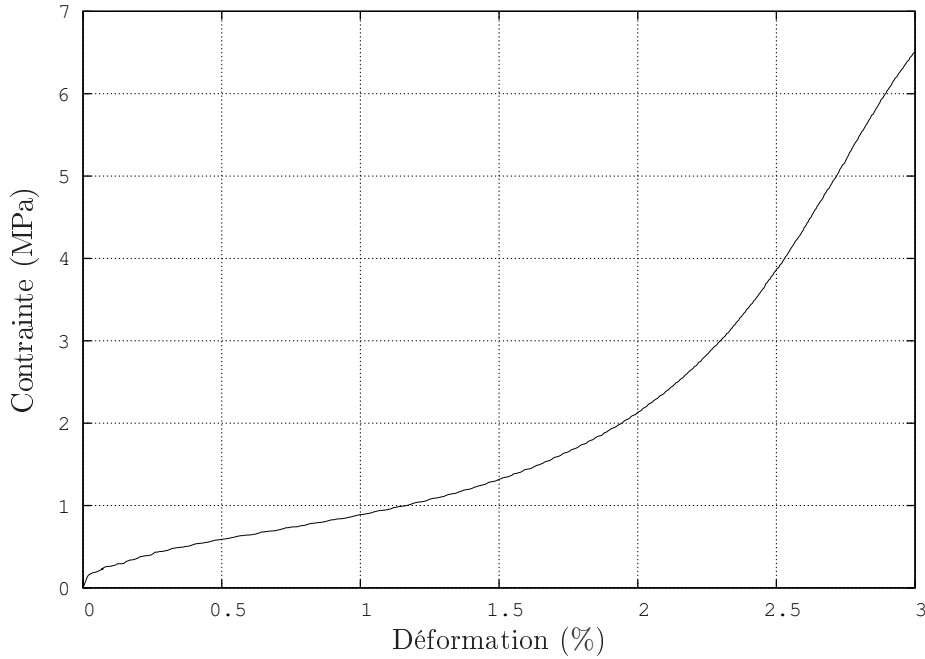


FIGURE IV.1 – *Caractère hyperélastique d'un élastomère en traction uniaxiale*

faisant apparaître un tenseur d'élasticité, l'autre hyperélastique introduisant une énergie fonction des déformations et enfin une forme différentielle appelée hypoélastique qui impose l'utilisation de dérivées objectives.

Concernant les élastomères, nous nous intéresserons en particulier aux lois de comportement des matériaux à comportement dit hyperélastique. Nous présentons FIGURE IV.1, la réponse d'un essai de montée en charge jusqu'à 300% de déformation en traction uniaxiale sur l'élastomère VHDS 1029. On constate alors que l'allure générale est fortement non-linéaire et peut présenter à partir d'un niveau important de déformation (ici 150%) une zone de raidissement due à l'alignement par extension des chaînes macromoléculaires (*cf.* § I.4) mais cela dépend bien sûr si le matériau cristallise ou non sous contrainte.

### IV.3 Loi de comportement hyperélastique

Un milieu hyperélastique est complètement défini par les conditions suivantes :

- l'existence d'une configuration de référence libre de toutes contraintes,
- le matériau ne dissipe pas d'énergie,
- les propriétés mécaniques du matériau sont décrites par une densité d'énergie de déformation ou potentiel hyperélastique noté  $\widehat{W}$  fonction des déformations.

On peut relier cette dernière à des grandeurs thermodynamiques. Par exemple, l'ouvrage WARD et SWEENEY [2004] propose le développement "historico-expérimental" suivant<sup>(1)</sup>.

Partant de l'expression du premier principe (conservation de l'énergie) comme suit :

$$de = dQ + dW_e, \quad (\text{IV.1})$$

avec  $de$ ,  $dQ$  et  $dW_e$  respectivement la variation d'énergie interne, la chaleur absorbée par le système et le travail élastique fournie par les forces extérieures. Or pour une transformation réversible, le second principe nous donne  $dQ = Tds$  où  $T$  et  $ds$  sont respectivement la température du système et sa variation d'entropie. Si bien que l'on peut alors écrire :

$$de = Tds + dW_e. \quad (\text{IV.2})$$

On décompose alors le travail des forces extérieures  $dW_e$  comme le produit d'une force  $f$  par un déplacement  $dl$  en négligeant la variation de volume très faible pour un élastomère tel que :

$$dW_e = fdl, \quad (\text{IV.3})$$

donc l'équation IV.2 devient dans un cas unidirectionnel :

$$de = Tds + fdl. \quad (\text{IV.4})$$

On introduit ensuite l'énergie libre spécifique de HELMHOLTZ  $\hat{\psi} = e - Ts$ , si bien que :

$$d\hat{\psi} = de - Tds - sdT. \quad (\text{IV.5})$$

L'équation IV.4 nous permet alors d'exprimer  $d\hat{\psi}$  telle que :

$$d\hat{\psi} = fdl - sdT, \quad (\text{IV.6})$$

qui nous mène aux relations suivantes :

$$\left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial l} \right)_T = f \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \right)_l = -s. \quad (\text{IV.7})$$

Or on sait que

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \right)_l = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial l} \right)_T, \quad (\text{IV.8})$$

donc on obtient une expression de l'entropie par rapport à  $l$  pour  $T$  à partir d'une grandeur mesurable expérimentalement telle que :

$$\left( \frac{\partial s}{\partial l} \right)_T = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l, \quad (\text{IV.9})$$

---

(1). Cette présentation de l'élasticité entropique est faite un peu au détriment de la précision. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de ?]

Dans le cas d'une transformation isotherme, les équations IV.5 et IV.6 nous donnent directement la relation  $d\hat{\psi} = de - Tds = fdl$  qui nous permet alors d'écrire :

$$f = \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial l} \right)_T = \left( \frac{\partial e}{\partial l} \right)_T - T \left( \frac{\partial s}{\partial l} \right)_T. \quad (\text{IV.10})$$

Une combinaison des équations IV.9 et IV.10 permet alors de déterminer l'évolution de l'énergie interne par rapport à  $l$  pour  $T$  fixée à partir de grandeurs mesurables expérimentalement  $f$ ,  $T$  et  $\left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l$  telle que :

$$\left( \frac{\partial e}{\partial l} \right)_T = f - T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l. \quad (\text{IV.11})$$

En 1935, MEYER et FERRI ont montré que la force de traction  $f$  est proportionnelle à la température  $T$  pour une même élongation  $\lambda = \frac{l}{l_0}$  telle que  $\left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_\lambda$  soit constant (*cf.* FIG. IV.2). Si bien que l'équation IV.11 nous donne :

$$f \sim T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_\lambda \implies \left( \frac{\partial e}{\partial \lambda} \right)_T \sim 0. \quad (\text{IV.12})$$

on injecte alors l'équation IV.12 dans la relation IV.10 et on obtient :

$$f \sim -T \left( \frac{\partial s}{\partial \lambda} \right)_T. \quad (\text{IV.13})$$

En première approximation, on peut alors considérer que l'élasticité caoutchoutique résulte entièrement de la variation d'entropie, d'où le terme d'élasticité entropique par opposition aux matériaux cristallins où l'élasticité provient essentiellement d'une variation d'énergie interne.

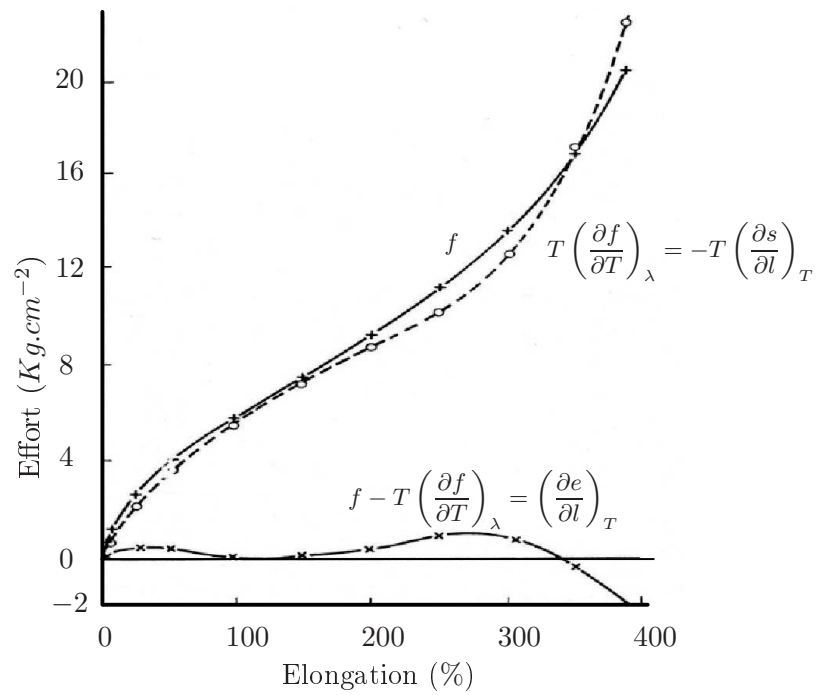


FIGURE IV.2 – Contribution de l'entropie et de l'énergie interne à la force de traction en fonction de l'élongation réalisée par MEYER et FERRI en 1935 extrait de (TREOLAR, 1975).



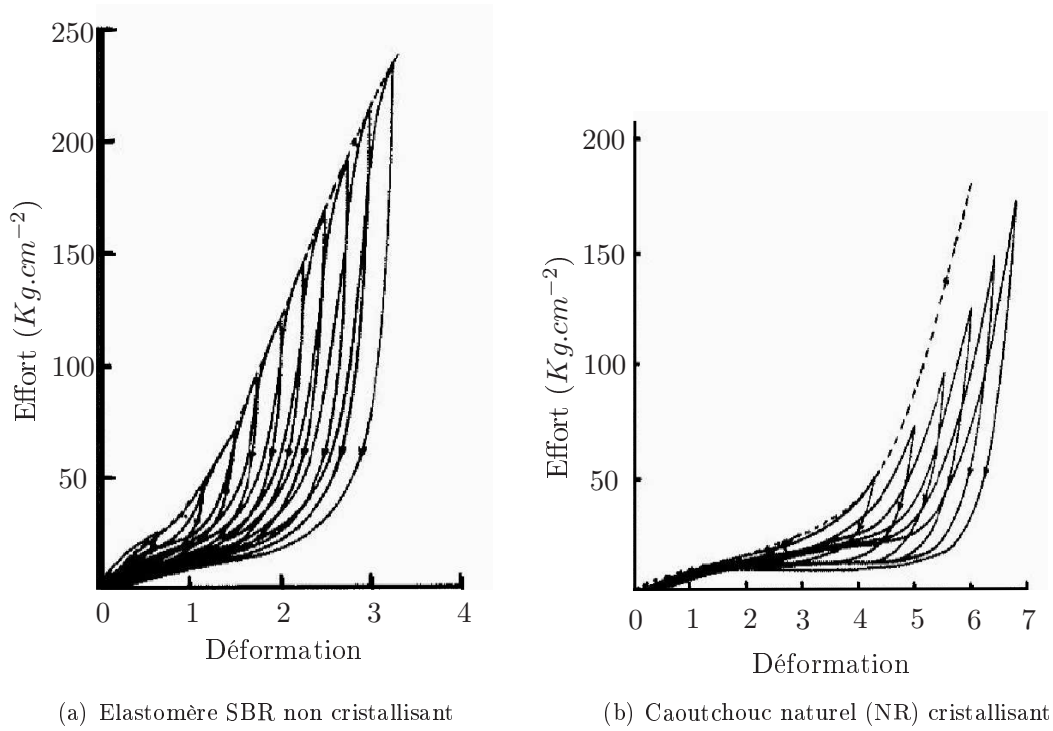


FIGURE IV.3 – Représentation de la cristallisation ou non sous contrainte par essai cyclique à amplitude croissante issue de [HARWOOD *et al.*, 1967].

Dans ce cas, les chaînes macromoléculaires maintiennent leur énergie interne de conformation (*i.e.* de disposition) au niveau minimal et s'empilent de façon à réduire au maximum l'espace restant entre elles. Ainsi, la cristallisation peut-être favorisée. Le caoutchouc naturel est par exemple un élastomère capable de cristalliser sous contrainte. Les auteurs HARWOOD *et al.* [1967] proposent de vérifier si le matériau étudié ne cristallise pas sous contrainte en réalisant un essai comprenant plusieurs cycles d'amplitude croissante. Si ces derniers rejoignent la courbe de comportement du matériau non-cyclé alors le matériau est non cristallisant (*cf.* FIG. IV.3<sup>(2)</sup>). Dans ces conditions, l'observation de la FIGURE III.5(b) du chapitre précédent montre que l'élastomère VHDS 1029 ne doit probablement pas cristalliser dans le domaine de déformation considéré.

La relation IV.6 nous montre que dans le cas d'un processus isotherme et réversible, le travail élastique est égal à la variation d'énergie libre. On peut alors faire correspondre le potentiel thermodynamique  $\widehat{W}$  à l'énergie libre de HELMHOLTZ  $\widehat{\psi}$  (ou la puissance spécifique  $\widehat{w}$ ). Dans ces conditions, le tenseur des contraintes s'écrit comme la dérivée de l'énergie libre du système. Donc si l'on se place dans le cadre thermodynamique en grandes déformations défini ANNEXE A en considérant un matériau isotrope non dissipatif suivant une transformation réversible et iso-

(2). La courbe en pointillés représente le comportement du matériau non-cyclé.

therme, on obtient alors une loi de comportement, suivant la description envisagée, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- Description eulérienne} \\ \bar{\sigma} = 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\bar{B}}} \\ \text{- Description lagrangienne} \\ \bar{\bar{S}} = 2\rho_0 \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\bar{E}}} \\ \text{- Description mixte} \\ \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \cdot \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\bar{\bar{F}}} \end{array} \right. \quad (\text{IV.14})$$

Ces équations permettent de décrire un comportement réversible, non dépendant du temps et non-linéaire. En effet, on voit que le comportement du matériau ne dépend que du choix de l'énergie libre.

Pour un solide homogène isotrope, la densité d'énergie peut s'exprimer en fonction des invariants de déformations  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ . Nous rappelons ici la définition des trois premiers invariants de  $\bar{\bar{B}}$  (sachant que  $I_i(\bar{\bar{B}}) = I_i(\bar{\bar{C}})$ ,  $\forall i \in [1..3]$ ) :

$$I_1 = \text{tr}\bar{\bar{B}}, \quad (\text{IV.15a})$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}\bar{\bar{B}})^2 - \text{tr}\bar{\bar{B}}^2), \quad (\text{IV.15b})$$

$$I_3 = \det \bar{\bar{B}}. \quad (\text{IV.15c})$$

## IV.4 Matériau incompressible

L'hypothèse d'incompressibilité intervient lors d'une transformation isochore telle que :

$$I_3 = (\det(\bar{\bar{F}}))^2 = J^2 = 1 \iff \text{tr}\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{F}}^{-T} : \dot{\bar{\bar{F}}} = 0. \quad (\text{IV.16})$$

Ainsi, la loi de comportement doit être modifiée. On ajoute une contrainte indéterminée qui ne travaille pas dans les mouvements compatibles avec ces liaisons. La densité d'énergie  $\hat{Q} = \rho\hat{\psi}$  (ou  $\hat{Q} = \rho_0\hat{\psi}$  suivant la configuration), s'écrit alors comme fonction des deux premiers invariants de déformation telle que  $Q = Q(I_1, I_2)$ . Pour la mise en équation de cette hypothèse, on lui associe la condition d'incompressibilité locale en utilisant un multiplicateur de LAGRANGE noté  $p$  :

$$\hat{Q} = Q(I_1, I_2) - p(J - 1). \quad (\text{IV.17})$$

En outre,  $p$  est une fonction scalaire homogène assimilable à une pression hydrostatique qui vient s'ajouter aux tenseurs des contraintes sans affecter les déformations. Elle est généralement déterminée à partir des équations d'équilibre et des conditions aux frontières. Les lois de comportement

IV.14 sous l'hypothèse d'incompressibilité s'expriment alors comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- Description eulérienne} \\ \bar{\sigma} = 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} - p\bar{\bar{1}} \\ \text{- Description lagrangienne} \\ \bar{\bar{S}} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{E}}} - p\bar{\bar{C}}^{-1} \\ \text{- Description mixte} \\ \bar{\pi} = 2\rho_0\bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{C}}} - p\text{Cof}\bar{\bar{F}} \end{array} \right. \quad (\text{IV.18})$$

## IV.5 Modélisation des énergies de déformation

Il existe de nombreuses formes pour modéliser l'énergie libre. La littérature [BOUKAMEL, 1988 ; JAZZAR, 1993 ; ROBISSON, 2000 ; MOREAU, 2000] les regroupe principalement en deux catégories. On distingue ainsi les approches statistiques (microscopiques ou micromécaniques) et phénoménologiques (macroscopiques).

### IV.5.1 Approches statistiques

#### • Modèle de distribution gaussienne de type néohookéen

Ces approches ont pour fondement des considérations de structures moléculaires. Une des principales réalisée par TRELOAR [1943], est basée sur une étude thermodynamique et statistique d'un élastomère réticulé. Elle suppose une distribution gaussienne de la distance entre les extrémités des chaînes, l'équi-répartition des points de réticulation, la prise en compte de l'entropie comme la somme des entropies élémentaires des chaînes et une transformation isochore (incompressibilité du matériau). Sous ces hypothèses, cette approche permet d'aboutir à une expression de l'énergie libre spécifique néohookéenne :

$$\psi = \frac{1}{2}Nk_bT(I_1 - 3), \quad (\text{IV.19})$$

avec  $N$  le nombre de chaînes moléculaires par unité de volume,  $T$  la température absolue et  $k_b$  la constante de BOLTZMANN. Le domaine de validité de cette description est d'environ 50% de déformation locale. D'autres études, modifiant l'une ou l'autre des hypothèses du modèle néohookéen, conduisent à des théories légèrement modifiées. En 1953, FLORY l'utilise pour élaborer une relation contrainte-déformation fonction de l'élongation nominale  $\lambda = l/l_0$  telle que :

$$K(\lambda) = Nk_bT(\lambda - \lambda^{-2}) \quad (\text{IV.20})$$

---

- **Modèle de distribution de probabilité sous la forme de fonction de LANGEVIN**

KÜHN ET GRÜN ont proposé en 1942 une nouvelle distribution de probabilité  $\mathcal{P}(r)$  sous la forme d'une fonction de LANGEVIN notée  $\mathcal{L}$ .

$$\ln(\mathcal{P}(r)) = n \left[ \frac{r}{nl} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right], \quad (\text{IV.21})$$

$$\beta = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{r}{nl} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}, \quad (\text{IV.22})$$

avec  $n$  le nombre de segments de la chaîne caractérisée par la distance  $r$  reliant ses deux extrémités et  $l$  la longueur de la chaîne. Cette méthode statistique permet alors de prendre en compte l'extensibilité limite des chaînes. Les auteurs ARRUDA et BOYCE [1993] ; BERGSTRÖM *et al.* [2002] ont utilisé cette approche statistique sur huit chaînes pour décrire le réseau macromoléculaire. Ils obtiennent l'expression du potentiel tronqué à l'ordre trois suivante :

$$\psi = Nk_b T \left[ \frac{1}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{20n} (I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050n^2} (I_1^3 - 27) \right]. \quad (\text{IV.23})$$

## IV.5.2 Modèles phénoménologiques

Ces théories s'appuient sur des démarches purement mathématiques et expérimentalement corréliées.

### IV.5.2.a Modèles classiques

Les modèles couramment utilisés pour des matériaux incompressibles sont les suivants :

- **Modèle de MOONEY-RIVLIN [MOONEY, 1940]**

$$\psi = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3). \quad (\text{IV.24})$$

Cette expression peut être considérée comme valide pour des plages de déformation pouvant aller jusqu'à 100%.

- **Modèle de RIVLIN, 1948**

$$\psi = \sum_{\substack{0 \leq m \leq \infty \\ 0 \leq n \leq \infty}} C_{nm} (I_1 - 3)^n (I_2 - 3)^m, \quad (\text{IV.25})$$

Le domaine de validité dépend dans ce cas du degré du polynôme choisi. On retrouve d'ailleurs le modèle néohookéen à un paramètre,  $C_{10}$ , en posant  $n = 1$  et  $m = 0$ .

---

• **Modèle de GENT-THOMAS** [GENT et THOMAS, 1958]

$$\psi = A(I_1 - 3) + B \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{IV.26})$$

Cette description permet une modélisation correcte pour des déformations inférieures à 200%.

• **Modèle de HART-SMITH** [HART-SMITH, 1966]

$$\psi = A_1 \int \exp(A_2(I_1 - 3)^2) dI_1 + A_3 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{IV.27})$$

Cette énergie libre spécifique décrit correctement le matériau pour des déformations inférieures à 500%.

• **Modèle de OGDEN** [OGDEN, 1972]

L'auteur de ce modèle choisit de faire intervenir les dilatations principales<sup>(3)</sup> ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ ) de  $\bar{\bar{C}}$  :

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3). \quad (\text{IV.28})$$

#### IV.5.2.b Autres modèles

- LAMBERT-DIANI et REY [1998, 1999] proposent pour le cas de matériaux incompressibles, une forme générale de densité d'énergie ainsi qu'une méthodologie d'identification des coefficients associés. La démarche consiste à optimiser les fonctions  $\frac{\partial \psi}{\partial I_1} = f(I_1)$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial I_2} = g(I_2)$ , supposées respectivement dépendantes uniquement des invariants  $I_1$  et  $I_2$ . Ils écrivent une forme polynomiale pour les deux fonctions telles que :

$$f(I_1) = \exp\left(\sum_{i=0}^n a_i (I_1 - 3)^i\right), \quad (\text{IV.29})$$

$$g(I_2) = \exp\left(\sum_{i=0}^m b_i (\ln(I_2 - 3))^i\right). \quad (\text{IV.30})$$

Ils précisent que d'excellents résultats ont été obtenus pour  $n = 2$  et  $m = 1$ .

- Pour un comportement fortement non-linéaire aux faibles déformations et qui devient linéaire par la suite (en traction et en cisaillement), LAHELLEC [2001] propose d'introduire une forme de potentiel originale composée d'une partie non-linéaire s'annulant vers l'infini et d'une partie de MOONEY-RIVLIN. Il présente cette énergie comme une énergie utilisant

---

(3). valeurs propres

la famille des fonctions de type *Erf*.

$$\begin{aligned}\psi(I_1, I_2) &= a_1 (I_1 - 3) + a_2 \sqrt{I_1 - 3} - \frac{a_2 \sqrt{\pi} \operatorname{Erfi}(\sqrt{a_3} \sqrt{I_1 - 3})}{\sqrt{a_3}} \\ &\quad + a_4 (I_2 - 3) + a_5 \sqrt{I_2 - 3} - \frac{a_5 \sqrt{\pi} \operatorname{Erfi}(\sqrt{a_6} \sqrt{I_2 - 3})}{\sqrt{a_6}},\end{aligned}\quad (\text{IV.31})$$

Sachant qu'une énergie en *Erf* s'exprime comme suit :

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (\text{IV.32})$$

$$\operatorname{Erfi}(z) = \frac{\operatorname{Erf}(jz)}{j}. \quad (\text{IV.33})$$

Il montre par la suite que l'expression des dérivées par rapport aux deux premiers invariants de l'énergie libre ne s'exprime plus en fonction de *Erf* mais telle que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial I_1} = a_1 + \frac{a_2 (1 - e^{a_3(I_1-3)})}{\sqrt{I_1-3}}, \quad (\text{IV.34})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial I_2} = a_4 + \frac{a_5 (1 - e^{a_6(I_2-3)})}{\sqrt{I_2-3}}. \quad (\text{IV.35})$$

Il est alors possible de constater que proche de l'état de référence, la réponse du matériau tend vers la réponse du matériau élastique linéaire incompressible défini par  $\mu = 4(a_1 + a_4)$ .

## IV.6 Identification des caractéristiques hyperélastiques

### IV.6.1 Etude analytique

L'objet de cette partie est d'exprimer les lois de comportement hyperélastique suivant différents cas simples de chargement. L'expression IV.18 du tenseur des contraintes pour un matériau hyperélastique incompressible d'énergie interne donnée  $\psi(I_1, I_2)$  peut donc aussi s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- Description eulérienne} \\ \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right] - p \bar{\bar{1}}. \\ \text{- Description lagrangienne} \\ \bar{\bar{S}} = 2\rho_0 \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{\bar{C}} \right] - p \bar{\bar{C}}^{-1} \\ \text{- Description mixte} \\ \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{\bar{C}} \right] - p \bar{\bar{F}}^{-T} \end{array} \right. \quad (\text{IV.36})$$

Pour réaliser l'identification des paramètres d'un modèle, nous utiliserons le premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF noté  $\bar{\bar{\pi}}$  sachant qu'il représente l'effort mesuré par unité de surface non-déformée. On déduira ensuite si nécessaire  $\bar{\bar{\sigma}}$  et  $\bar{\bar{S}}$  de la relation suivante sous l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}}. \quad (\text{IV.37})$$

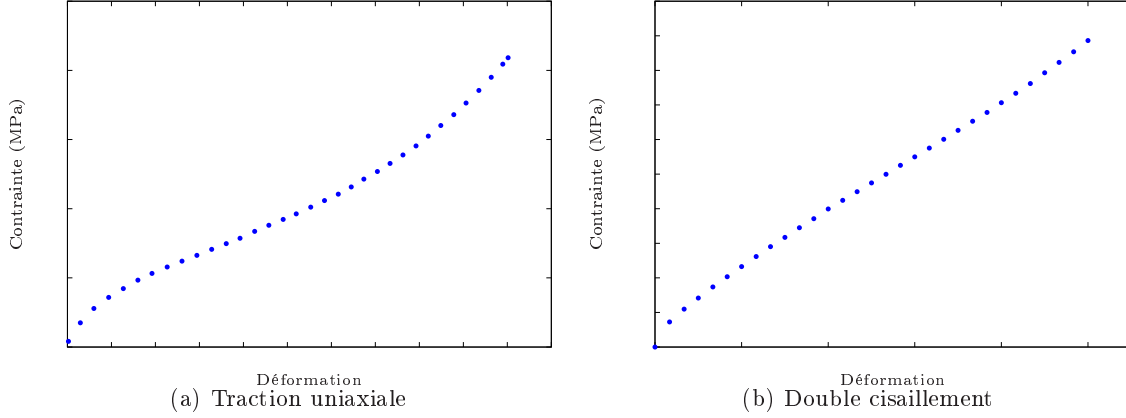


FIGURE IV.4 – *Présentation des essais de montée en charge sur l'élastomère silicone VHDS 1029 en traction uniaxiale et en cisaillement simple ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\gamma} = 0.01s^{-1}$ ).*

On donne l'expression de la contrainte pour deux cas simples de chargement sachant que les détails de calculs sont disponibles en ANNEXE B :

– en traction uniaxiale :

$$\pi_{11} = 2\rho_0 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{1}{\lambda} \right], \quad (IV.38)$$

– en cisaillement simple :

$$\pi_{12} = 2\rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \gamma. \quad (IV.39)$$

#### IV.6.2 Résultats d'identification

L'identification d'un modèle revient à déterminer l'ensemble des paramètres matériaux qu'il fait intervenir. Il s'agit donc de déterminer un vecteur de paramètres permettant de corrélérer au mieux les résultats d'essais expérimentaux.

Nous utilisons comme essais de référence pour l'identification ceux présentés FIGURE IV.4. Il s'agit d'essais de montée en charge réalisés en traction uniaxiale et en double cisaillement sur l'élastomère silicone VHDS 1029 pour un faible taux de déformation ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\gamma} = 0.01s^{-1}$ ) avec respectivement une déformation maximale telle que  $\varepsilon_{max} = 100\%$  et  $\gamma_{max} = 50\%$ .

L'identification s'est effectuée par minimisation au sens des moindres carrés de manière semi-analytique à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA<sup>©</sup> et la visualisation des résultats avec MAPPLE<sup>©</sup>.

Dans cette campagne d'identification des caractéristiques hyperélastiques, nous proposons de mettre en évidence l'importance des essais utilisés comme référence d'identification *i.e.* le type de chargement. Nous nous fixons donc comme objectif d'identifier un modèle capable de refléter correctement les deux essais présentés FIGURE IV.4.

Modèle	Erreur relative (%) <sup>a</sup> .	
	Traction uniaxiale	Double cisaillement
néohookéen	9.9	6.3
GENT-THOMAS	8.48	4.41
HART-SMITH	3.2	2.8
RIVLIN (9 termes)	0.35	2.81

TABLEAU IV.2 – Erreurs relatives obtenues par identification des modèles hyperélastiques sur des essais de montée en charge en traction uniaxiale ou en double cisaillement.

<sup>a</sup> Les erreurs relatives sont calculées via la distance des moindres carrés entre la courbe réponse expérimentale  $\tau^{exp}$  et celle théoriques  $\tau^{mod}$  comme suit  $\sqrt{\sum_{i=1}^{Nexp} (\tau_i^{mod} - \tau_i^{exp})^2} / \sum_{i=1}^{Nexp} (\tau_i^{exp})^2$

Nous commencerons donc par mettre en avant les dangers d'utiliser un seul type d'essai d'identification lorsqu'on souhaite appliquer le modèle à un autre cas de chargement. La solution proposée est alors d'identifier les paramètres du modèle simultanément en traction uniaxiale et en double cisaillement. A ce stade de l'analyse, l'introduction de notions telles que l'admissibilité thermodynamique et la stabilité matérielle nous permettra de mettre en avant les précautions à prendre avant d'entamer une campagne d'identification des caractéristiques hyperélastiques d'un modèle. Au cours de cette étude, on propose de comparer les quatre modèles suivants :

- le modèle néohookéen,
- le modèle de GENT-THOMAS,
- le modèle de HART-SMITH,
- le modèle polynomial à 9 termes de type RIVLIN.

#### IV.6.2.a Problématique d'identification sur un chargement donné

De manière générale, les résultats d'identification sur un chargement donné (traction uniaxiale ou le double cisaillement) sont d'autant plus satisfaisant que le nombre de paramètres mis en jeu par le modèle étudié (*cf.* TAB. IV.2). Quel que soit le type de chargement utilisé comme référence d'identification, le modèle le plus intéressant est celui de RIVLIN à 9 termes (*cf.* FIG. IV.5(a) en traction uniaxiale et FIG. IV.6(a) en double cisaillement).

Cependant, lorsqu'on observe les confrontations sur des types de chargement différents de ceux utilisés comme référence d'identification via les FIGURES IV.5(b) et IV.6(b), on constate que les modèles ainsi identifiés corréleront bien moins l'expérience et dans certains cas deviennent instables. On peut donner comme exemple le modèle de RIVLIN 9 termes identifié en traction uniaxiale et les modèles de GENT-THOMAS et HART-SMITH identifiés en double cisaillement.

L'identification d'un modèle hyperélastique sur un chargement donné n'est donc pas nécessairement fiable lorsqu'on s'éloigne de celui-ci, d'où la nécessité d'utiliser plusieurs types de chargement comme référence d'identification.



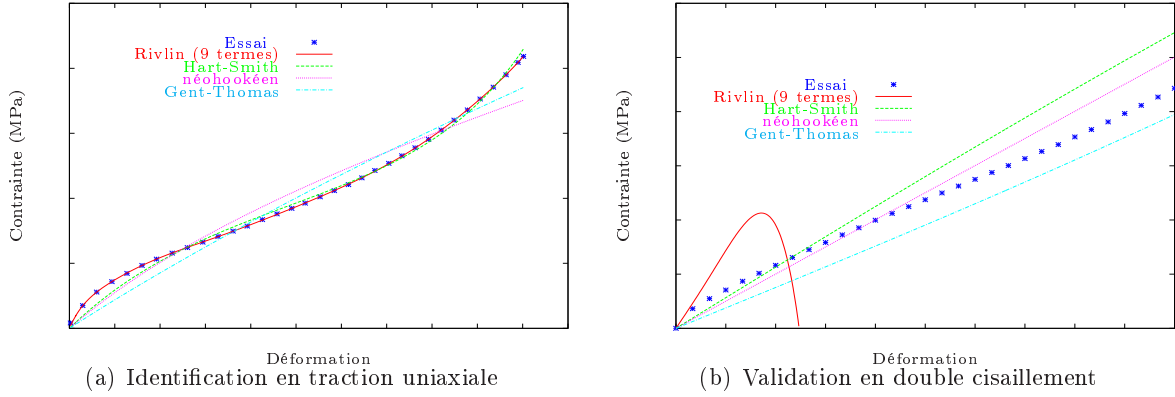


FIGURE IV.5 – Résultats d'identification de divers modèles hyperélastiques en traction uniaxiale. Confrontation des modèles ainsi identifiés face à un essais en double cisaillement.

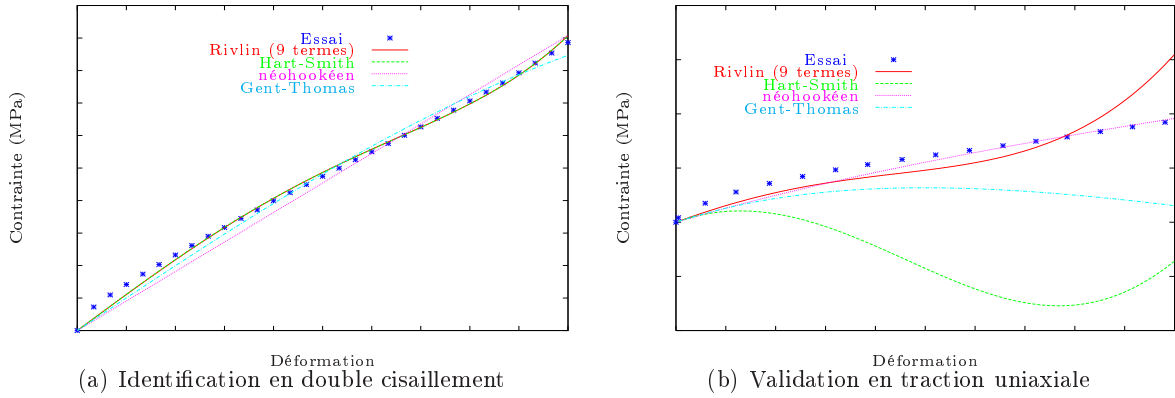


FIGURE IV.6 – Résultats d'identification de divers modèles hyperélastiques en double cisaillement. Confrontation des modèles ainsi identifiés face à un essais en traction uniaxiale.

#### IV.6.2.b Identification couplée en traction uniaxiale et en double cisaillement

Nous réalisons maintenant une identification simultanée sur des essais de traction uniaxiale et de double cisaillement. On propose TABLEAU IV.3 une présentation des paramètres identifiés pour chacun des modèles utilisés.

La FIGURE IV.7 illustre les résultats d'identification ainsi obtenus. Les modèles offrent alors des corrélations satisfaisantes avec les deux types de chargement et le nombre de paramètres du modèle joue un rôle important dans la finesse des résultats comme nous l'avons déjà constaté au paragraphe précédent.

Cependant, une comparaison des erreurs relatives d'identification sur un chargement donné (cf. TAB. IV.2) avec celles obtenues par identification simultanée (cf. TAB. IV.4) montre une perte de qualité des résultats quelque soit le modèle envisagé. Comme on pouvait l'imaginer, l'utilisation de plusieurs essais comme référence d'identification impose une diminution de la précision des

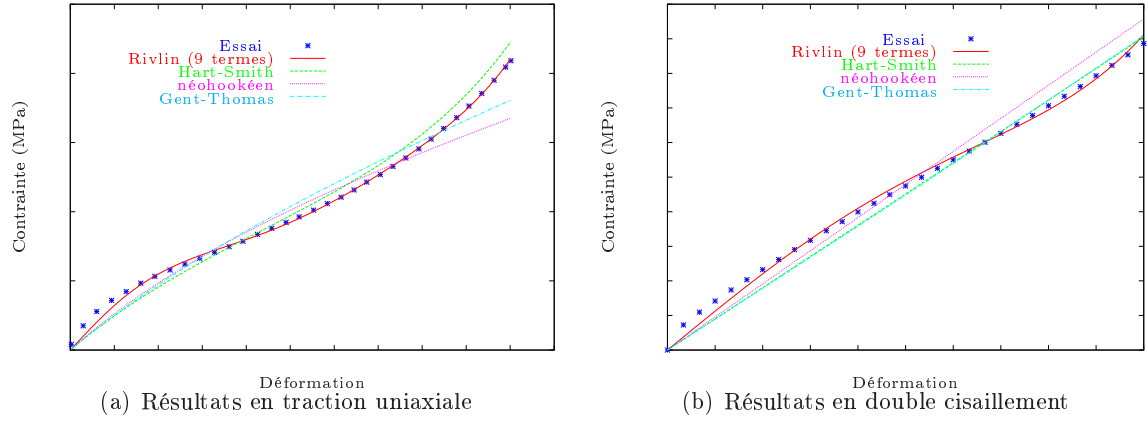


FIGURE IV.7 – Résultats d'identification de divers modèles hyperélastiques réalisée simultanément sur des essais de traction uniaxiale et de double cisaillement.

résultats.

Il semble donc important avant d'entamer une campagne d'identification des caractéristiques

$C_{10}$ (MPa)   C.E.	$A$ (MPa)   C.E. $B$ (MPa)   C.E.	$A_1$ (MPa)   C.E. $A_2$   C.E. $A_3$ (MPa)   C.E.
(a) Modèle néohookéen.	(b) Modèle de GENT-THOMAS.	(c) Modèle de HART-SMITH.

$C_{i/j}$ (MPa)	0	1	2	3
0		C.E.	C.E.	C.E.
1	C.E.	C.E.	C.E.	
2	C.E.	C.E.		
3	C.E.			

(d) Modèle de RIVLIN 9 termes.

TABEAU IV.3 – Paramètres des modèles hyperélastiques identifiés simultanément sur des essais de traction uniaxiale et de double cisaillement

Modèle	Erreur relative (%)	
	Traction uniaxiale	Double cisaillement
neohookéen	10.82	8.33
GENT-THOMAS	8.94	6.68
HART-SMITH	7.12	6.38
RIVLIN (9 termes)	2.11	2.84

TABEAU IV.4 – Erreurs relatives obtenues par identification des modèles hyperélastiques simultanément en traction uniaxiale et en double cisaillement.

hyperélastiques de déterminer les types de chargement que le matériau va subir (uni-, bi- ou tri-directionnels) et de situer son domaine d'utilisation en terme de déformation. Ainsi le (ou les) essai(s) de montée en charge sur le(s)quel(s) se basera l'identification sera choisi en concordance avec le domaine de travail de l'étude.

#### IV.6.2.c Conditions d'admissibilité thermodynamique et de stabilité matérielle

La notion de stabilité matérielle est définie au sens de stabilité élastique de la loi de comportement quelque soit l'état de déformation.

LEJEUNES [2002] répertorie des conditions d'admissibilité thermodynamique et/ou de stabilité matérielle d'une énergie libre incompressible exprimée en fonction des dilatations principales telle que  $\psi(\lambda_1, \lambda_2)$  et dont voici quelques exemples :

- l'énergie libre doit être positive ou nulle quel que soit l'état de déformation,

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0. \quad (\text{IV.40})$$

Cette condition provient intégralement des hypothèses que l'on a émises dans le cadre thermodynamique défini en ANNEXE A.3,

- vérifier l'inégalité de COLEMAN et NOLL, 1959 [LEBLOND, 1992] telle que :

$$\left( \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \right) : \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\bar{F}} \partial \bar{\bar{F}}} : \left( \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \right) > 0 \quad (\text{IV.41})$$

dans la configuration de référence,

- vérifier l'inégalité de HILL : Le produit scalaire d'un taux de déformation objectif par un taux de contrainte objectif doit être positif (1970). Ce qui se traduit par la relation<sup>(4)</sup>

$$\overset{\Delta}{\bar{\bar{\sigma}}} : \bar{\bar{D}} > 0 \quad (\text{IV.42})$$

en description eulérienne,

- vérifier les conditions d'existence et d'unicité du minimum local du problème d'élasticité que montre BALL, 1977 [CIARLET, 1986] :
- (poly)convexité, où dans le cas incompressible, convexité de  $\psi(\lambda_1, \lambda_2)$ ,

$$\det \nabla^2 \psi(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0. \quad (\text{IV.43})$$

En effet, si on parle de  $\psi_a(\bar{\bar{F}})$  comme polyconvexe, cela revient à considérer un certain  $\psi_b(\bar{\bar{F}}, \text{Cof} \bar{\bar{F}}, \det \bar{\bar{F}})$  comme convexe. Il suffit alors de se placer dans le cas d'un matériau incompressible dans l'espace des dilatations principales et on retrouve  $\psi(\lambda_1, \lambda_2)$  convexe,

---

(4). Dans ce cas, et il ne s'agit que d'un exemple,  $\overset{\Delta}{\bar{\bar{\sigma}}} = \dot{\bar{\bar{\sigma}}} + \bar{\bar{\sigma}} \bar{\bar{W}} - \bar{\bar{W}} \bar{\bar{\sigma}}$  représente la dérivée objective de JAUMANN

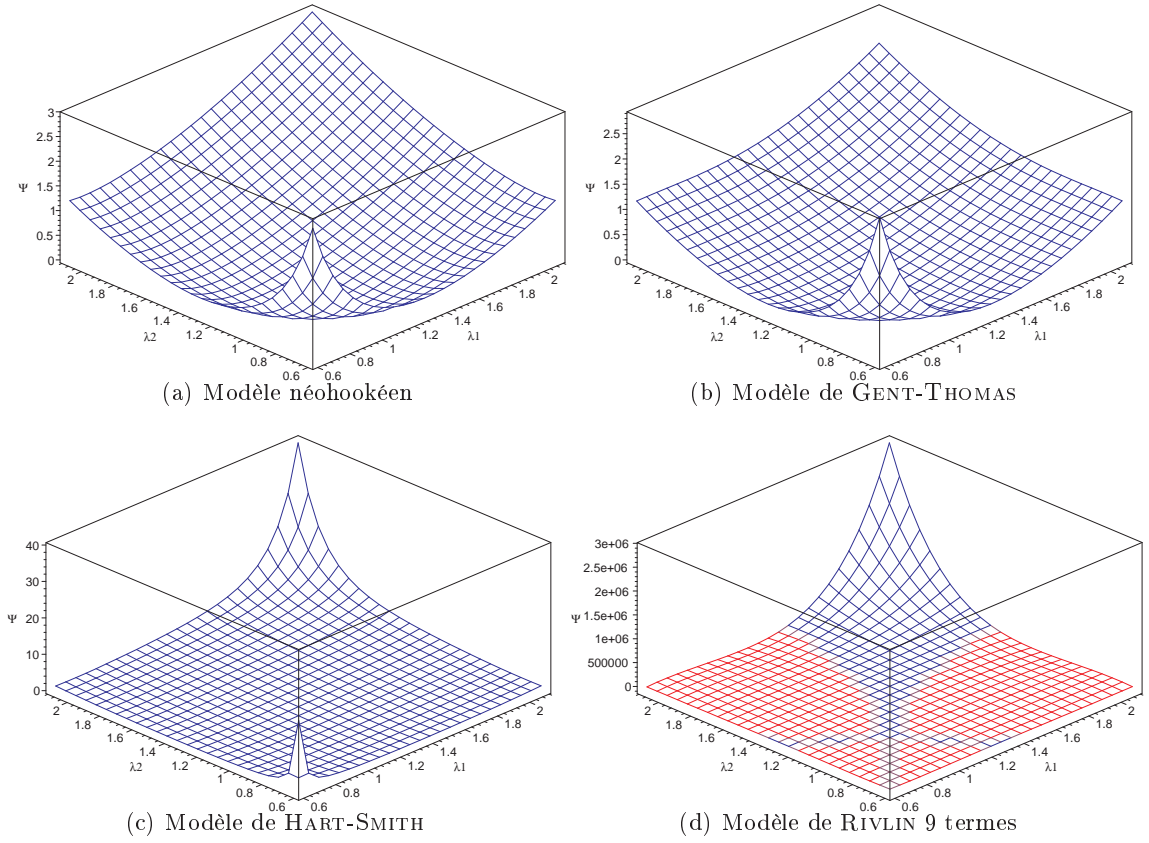


FIGURE IV.8 – Représentation de la fonctionnelle d'énergie libre en fonction des dilatations principales  $(\lambda_1, \lambda_2)$  obtenue après identification des paramètres sur un essai de traction uniaxiale.

– continuité à l'infini et coercivité suivant ces arguments,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} \psi(\lambda_1, \lambda_2) = \infty, \\ \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \infty} \psi(\lambda_1, \lambda_2) = \infty, \\ \lim_{\bar{F}(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \bar{1}} \psi(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV.44})$$

A titre d'observation qualitative, nous proposons une visualisation en trois dimensions  $(\lambda_1, \lambda_2, \psi(\lambda_1, \lambda_2))$  permettant de présenter les fonctionnelles d'énergie libre obtenues à partir des identifications réalisées précédemment (*cf.* § IV.6.2.a et § IV.6.2.b). L'utilité de ce type de représentations est qu'elles fournissent des renseignements visuels concernant la positivité (une zone rouge représente une énergie négative), la convexité, la coercivité de la fonctionnelle d'énergie libre dans un domaine prédéterminé (*cf.* FIG. IV.8, FIG. IV.9 et FIG. IV.10). Cette représentation des fonctionnelles d'énergie libre permet de rejeter certains modèles identifiés mais ne permet en aucun cas de les valider.

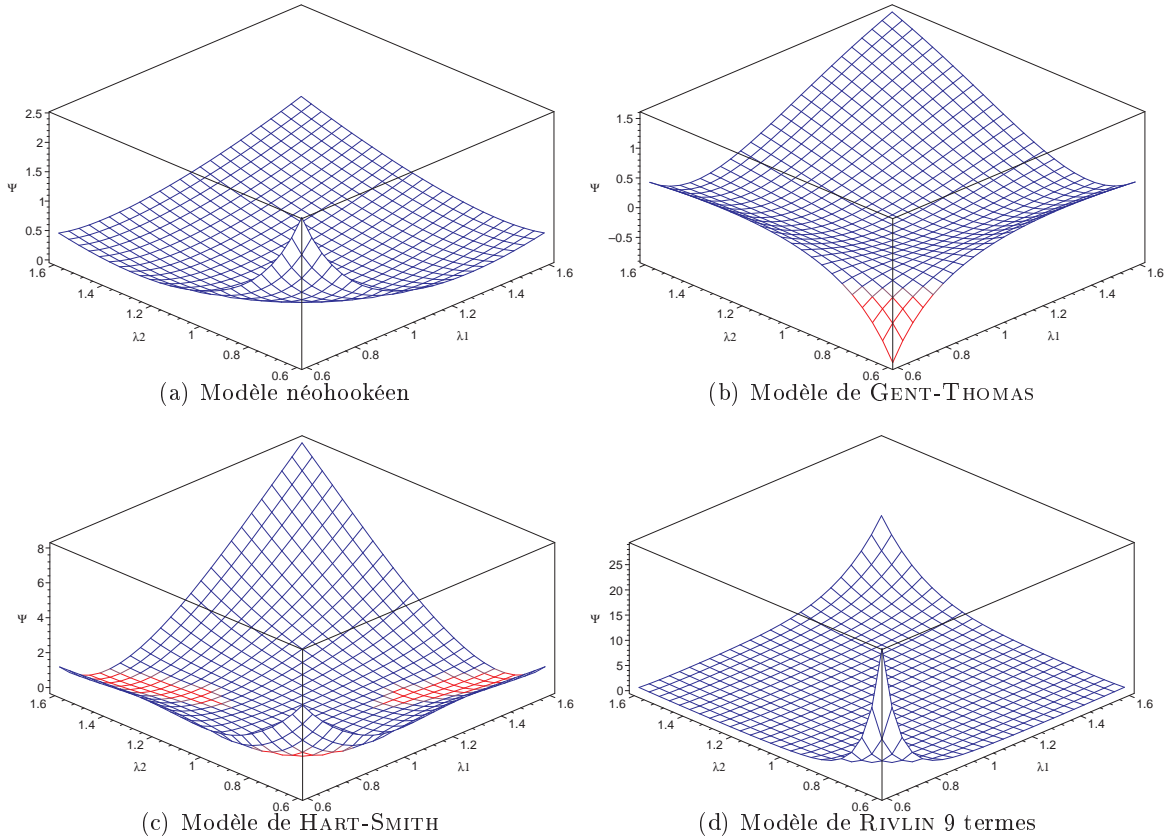


FIGURE IV.9 – Représentation de la fonctionnelle d'énergie libre en fonction des dilatations principales ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ) obtenue après identification des paramètres sur un essai de double cisaillement.

On présente ici les constatations les plus importantes que nous avons réalisées :

- la FIGURE IV.8(d) illustre la fonctionnelle d'énergie libre du modèle de RIVLIN à 9 termes dont les paramètres ont été identifiés en traction uniaxiale. Lorsqu'on s'éloigne de la direction du chargement utilisé comme référence d'identification, on constate alors que l'énergie devient négative. On retrouve donc les observations effectuées lors de la confrontation du modèle ainsi identifié sur un essai de double cisaillement (*cf.* FIG. IV.5),
- concernant l'évolution des fonctionnelles d'énergie libre des modèles de GENT-THOMAS et de HART-SMITH identifiés en double cisaillement (resp. FIG. IV.9(b) et FIG. IV.9(c)), on constate qu'ils ne vérifient pas les conditions de stabilité matérielle. En effet, la représentation de la fonctionnelle d'énergie montre certaines zones où l'énergie est négative voire même non convexe et qui correspondent aux observations que l'on a réalisées au regard de la FIGURE IV.6(b),
- via la FIGURE IV.7 et le TABLEAU IV.3, on a précisé que le modèle de RIVLIN à 9 termes identifié en couplant les deux chargements possède la meilleure corrélation (face aux autres modèles). Cependant lorsqu'on visualise sa fonctionnelle d'énergie FIGURE IV.8(d), on constate

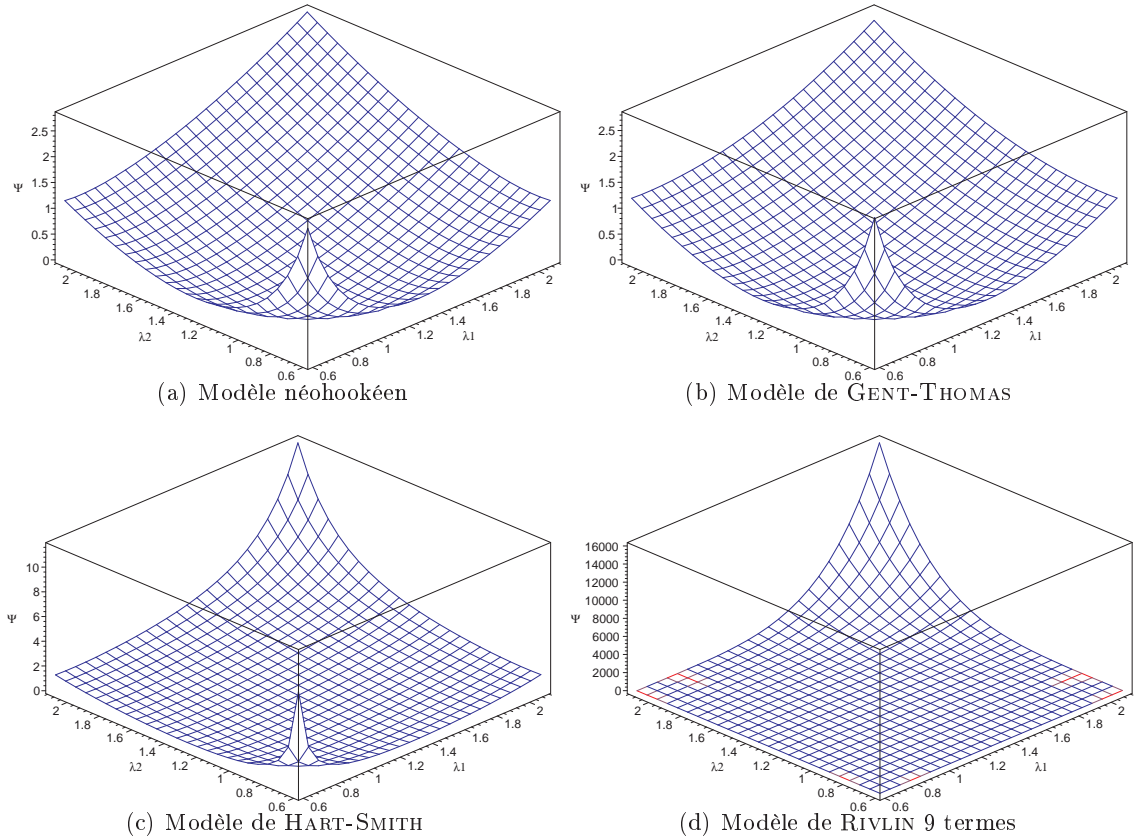


FIGURE IV.10 – Représentation de la fonctionnelle d'énergie libre en fonction des dilatations principales ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ) obtenue après identification des paramètres couplée sur un essai de traction uniaxiale et un essai de double cisaillement.

la présence de zone ou celle-ci se trouve être négative et non convexe.

Pour pallier ces instabilités matérielles, de nombreux auteurs ont choisi d'introduire des conditions (ou critères) de stabilité dans la procédure d'identification en imposant par exemple :

- la positivité des paramètres pour les modèles polynomiaux. Il s'agit alors d'une condition suffisante mais pas forcément nécessaire [HARTMANN, 2001],
- ou bien une contrainte de convexité. Dans ce cas, la condition est nécessaire et suffisante à la stabilité matérielle. Les résultats sont alors plus stables pour un domaine de chargement donné mais moins précis en terme de corrélation avec l'expérience [LEJEUNES *et al.*, 2003].

Pour conclure, on peut préciser que malgré les résultats d'identification les moins performants de tous les modèles, seule l'énergie libre néohookéenne assure une positivité, une convexité et une coercivité de la fonctionnelle d'énergie quelques soient le type et le domaine de chargement utilisé pour l'identification. Une seule condition est alors nécessaire : la positivité de son paramètre.

## IV.7 Conclusion

L'étude des matériaux à comportement hyperélastique nous a permis de mettre en exergue la grande faculté de déformation des élastomères. Cependant, la présence de forte non-linéarité de la réponse en contrainte-déformation impose l'utilisation de modèles d'énergie libre que l'on peut choisir parmi les propositions aussi nombreuses que variées que suggère la littérature.

Au bilan de la campagne d'identification, quels que soient le nombre et le type d'essais utilisés comme référence, il semble que d'une manière générale la qualité de la corrélation avec l'expérience dépend du nombre de paramètre proposé par les modèles. Cependant, une brève observation qualitative de la stabilité matérielle nous montre la nécessité de prendre certaines précautions quant à l'utilisation des modèles hyperélastiques.

---

## Premières approches du comportement dissipatif

**L**a modélisation du comportement dissipatif des élastomères est globalement moins avancée que celle des matériaux cristallins. Ils possèdent en effet un comportement très complexe et sont sensibles à de nombreux paramètres tels que la température, la vitesse et l'amplitude de chargement. . . De ce fait, les modèles foisonnent mais aucun consensus ne se dessine nettement à l'heure actuelle même si des efforts considérables ont été consentis depuis plusieurs années notamment par les communautés américaine et allemande.

Dans ce chapitre, on survole l'état de l'art des modèles de comportement dissipatif. Ensuite, on réalise une première approche de modélisation phénoménologique associant ainsi hyperélasticité et caractère dissipatif en grandes déformations pour des transformations isothermes.



## PLAN DU CHAPITRE V

---

<b>V.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>103</b>
<b>V.2</b>	<b>Synthèse bibliographique sur les modèles de comportement dissipatif</b>	<b>104</b>
V.2.1	Le comportement viscoélastique	104
V.2.1.a	Formulations intégrales	105
V.2.1.b	Formulations différentielles	109
V.2.2	Le comportement élastoplastique : frottement interne non visqueux	114
V.2.2.a	Potentiels de matériaux hystérétiques sans viscosité	114
V.2.2.b	Modèles rhéologiques élastoplastiques	116
V.2.2.c	Modèles de friction	121
V.2.3	L'endommagement des élastomères chargés	122
V.2.3.a	Caractérisation de l'endommagement	122
V.2.3.b	Exemples de lois d'endommagement	124
V.2.4	Bilan	128
<b>V.3</b>	<b>Présentation des modèles viscoélastiques et élastoplastiques</b>	<b>130</b>
V.3.1	Synthèse du formalisme mécanique adopté	130
V.3.2	Modèles de comportement viscoélastique	131
V.3.3	Modèles de comportement élastoplastique	136
<b>V.4</b>	<b>Campagne d'identification des modèles</b>	<b>139</b>
V.4.1	Méthode d'identification	139
V.4.2	Résultats d'identification	142
V.4.2.a	Modèles de comportement viscoélastique	142
V.4.2.b	Modèles de comportement viscoélastique avec enrichissement de la branche principale hyperélastique	146
V.4.2.c	Modèles de comportement élastoplastique	151
<b>V.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>154</b>

---

## V.1 Introduction

Les matériaux à comportement hyperélastique présentés au chapitre précédent sont incapables de rendre compte du caractère dissipatif qui confère aux élastomères des propriétés amortissantes. Cependant, cette caractéristique est particulièrement importante pour une utilisation dans des systèmes passifs de filtrage des vibrations et chocs.

D'une manière générale, un système est dissipatif si ses propriétés à un instant donné dépendent non seulement des paramètres qui le décrivent à cet instant mais également de son état antérieur. Il présente alors un phénomène d'hystérésis. On peut noter d'autres matériaux possédant un comportement hystérétique tels que les matériaux ferrimagnétiques (ferrites isolantes) et ferromagnétiques (aimants). Dans ce cas lorsque le champ magnétique extérieur est supprimé, l'aimantation du matériau ne revient pas à sa valeur initiale.

D'un point de vue microstructurale, l'amortissement des élastomères chargés est principalement dû à un réarrangement moléculaire au niveau de la structure interne du matériau : les éléments moléculaires (chaînes et charges) glissent les uns par rapport aux autres entraînant un frottement qui génère alors une perte d'énergie [SAAD, 2003].

La littérature propose de nombreuses orientations pour représenter ce phénomène. On donne ici les grandes lignes qui les définissent sachant que l'on peut observer également des combinaisons :

- une manifestation viscoélastique : on parlera dans ce cas du temps que met le matériau pour regagner son état d'équilibre *i.e.* une résistance à la réorganisation des chaînes macromoléculaires. Ces modèles sont particulièrement utilisés pour modéliser les phénomènes dépendant du temps [GREEN et RIVLIN, 1957 ; SIMO, 1987 ; GABRIELI, 1995 ; HOLZAPFEL et SIMO, 1996b ; BOUKAMEL *et al.*, 2000 ; MÉO, 2000 ; ROBISSON, 2000 ; LAHELLEC, 2001 ; SAAD, 2003],
- les glissements et rupture des contacts charges/charges et charges/chaînes : partant du constat expérimental qui nous apprend que l'amortissement est d'autant plus important que le matériau est chargé (*cf.* § I.5), on introduit alors la notion de frottement interne non visqueux *i.e.* plasticité. En effet l'observation de l'hystérésis à basse fréquence est traduite par certains auteurs par du frottement sec. Ces modèles sont particulièrement utilisés pour modéliser les phénomènes dépendant de la déformation [LION, 1998 ; KALISKE, 1998 ; BRACKBILL, 2000 ; BESDO et IHLEMAN, 2001 ; CANTOURNET et DESMORAT, 2003],
- les effets d'endommagement (décohésion, cavitation) : on parle alors d'une dépendance à l'histoire du chargement ce qui permettra par exemple de reproduire un adoucissement cyclique (l'effet MULLINS, la fatigue...) et/ou de caractériser la rupture [GOVINDJEE et SIMO, 1991 ; MIEHE, 1995 ; BIKARD et DÉSOYER, 2001 ; BIKARD, 2002].

### REMARQUE V.1

Les conclusions émises au CHAPITRE III montrent que la dissipation au cours d'un essai cyclique

évolue de manière significative suivant les paramètres temps de sollicitation et amplitude dynamique ou déformation maximale mais aussi de la température. La dépendance suivant cette dernière ne sera pas abordée dans ce chapitre. Les essais utilisés seront ceux réalisés à température ambiante (constante) et l'ensemble des modèles présentés négligeront les effets thermiques et considéreront donc une transformation isotherme.

□

## V.2 Synthèse bibliographique sur les modèles de comportement dissipatif

Cette section présente un état de l'art non exhaustif des formulations utilisées pour représenter les matériaux à caractère amortissant. Il s'agira plutôt de discuter autour des formulations que propose la littérature et non d'en réaliser une étude complète et minutieuse.

Dans cette optique, on propose alors au lecteur de s'intéresser en premier lieu à la dépendance de la réponse au temps d'observation ou de sollicitation qui relève d'un comportement viscoélastique et ensuite de considérer la dissipation comme non visqueuse en introduisant le comportement élastoplastique. Enfin, nous aborderons le phénomène d'endommagement. Malgré l'importance de celui-ci pour des sollicitations dynamiques (en fatigue par exemple), il ne sera pas mis en œuvre dans nos travaux.

### V.2.1 Le comportement viscoélastique

La modélisation du comportement viscoélastique est bien maîtrisée dans le cadre classique des petites déformations mais demeure un important domaine d'investigation en grandes déformations. Deux grandes approches de modélisation se détachent pour caractériser ce comportement :

- les formulations intégrales qui nécessitent une approche fonctionnelle faisant intervenir des intégrales héréditaires qui considèrent les contraintes comme une fonction de l'histoire des déformations. Cette approche n'est pas utilisée dans le cadre de cette étude mais elle a fait l'objet de nombreux travaux [COLEMAN et NOLL, 1961 ; BERNSTEIN *et al.*, 1963 ; SIMO, 1987 ; MORMAN, 1988],
- les formulations différentielles qui sont principalement axées sur la théorie de l'état local associée au cadre des matériaux standards généralisés [SIDOROFF, 1974, 1975a, 1977, 1982 ; HALPHEN et NGUYEN QUOC SON, 1975 ; GERMAIN, 1986 ; LE TALLEC et RAHIER, 1994]. Ce type d'approche par variables internes est pour une grande part basée sur les équations présentées en ANNEXE A.5.

### V.2.1.a Formulations intégrales

L'approche fonctionnelle correspond à une extension de la viscoélasticité linéaire en petites déformations. Afin de mieux comprendre les formulations intégrales appliquées aux grandes déformations, nous proposons donc quelques rappels sur la viscoélasticité linéaire.

#### • Viscoélasticité linéaire

Dans le cadre de l'élasticité linéaire pour un matériau homogène isotrope, on rappelle que  $\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\mathbf{1}} + 2\mu \bar{\varepsilon}$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de LAMÉ.

On va établir formellement la réponse  $\sigma(t)$  à une sollicitation unidimensionnelle  $\varepsilon(t)$  d'un matériau à comportement viscoélastique [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1996]. On considère une sollicitation de relaxation telle que  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t - t')$  avec  $\varepsilon_0$  constante,  $t'$  temps de référence et  $\mathcal{H}$  fonction d'échelon d'HEAVISIDE où  $\mathcal{H} = 0$  si  $t - t' < 0$  et  $\mathcal{H} = 1$  sinon. La réponse en contrainte à une telle sollicitation s'écrit alors :

$$\sigma(t) = \mu(t - t') \varepsilon_0, \quad (\text{V.1})$$

où  $\mu(t - t')$  est le module de relaxation (ou de retard).

Maintenant, si l'on considère une succession d'incrément de déformation tels que :

$$\varepsilon(t) = \sum_i \Delta \varepsilon_i \mathcal{H}(t - t'_i), \quad (\text{V.2})$$

et qu'on applique le principe de superposition de BOLTZMANN<sup>(1)</sup> dont la relation contrainte-déformation est linéaire, la réponse globale prend la forme :

$$\sigma(t) = \sum_i \sigma(\Delta \varepsilon_i, t - t'_i) = \sum_i \mu(t - t'_i) \Delta \varepsilon_i, \quad (\text{V.3})$$

La généralisation à trois dimensions permet d'écrire la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire supposé homogène isotrope en fonction d'une intégrale héréditaire liant les contraintes à l'histoire des déformations tel que :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t \lambda(t - t') \text{tr}(\dot{\bar{\varepsilon}}(t')) dt' \bar{\mathbf{1}} + \int_0^t 2\mu(t - t') \dot{\bar{\varepsilon}}(t') dt'. \quad (\text{V.4})$$

Il est commode de séparer les contributions des parties déviatoriques et sphériques.

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^D(t) = \bar{\sigma}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\sigma}(t)) \bar{\mathbf{1}}, \\ \bar{\varepsilon}^D(t) = \bar{\varepsilon}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\varepsilon}(t)) \bar{\mathbf{1}}. \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

---

(1). "Si l'on superpose deux histoires de sollicitations, la réponse est la superposition des deux réponses". Ce principe n'est applicable que dans le cas des matériaux pour lesquels la fonctionnelle entre contrainte et déformation est linéaire.

On peut alors écrire la loi de comportement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^D(t) = \int_0^t 2\mu(t-t') \dot{\bar{\varepsilon}}^D(t') dt', \\ \text{tr}(\bar{\sigma}(t)) = 3 \int_0^t K(t-t') \text{tr}(\dot{\bar{\varepsilon}}(t')) dt'. \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

où  $K$  est le module de compressibilité (ou module de dilatation volumique) relié aux coefficients de LAMÉ par  $3K(t) = 3\lambda(t) + 2\mu(t)$ . Dans ce cas,  $K(t)$  et  $\mu(t)$  sont des fonctionnelles de relaxation<sup>(2)</sup>.

On peut alors écrire une forme équivalente à l'équation V.4 :

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t 2\mu(t-t') \dot{\bar{\varepsilon}}^D dt' + \int_0^t K(t-t') \text{tr}(\dot{\bar{\varepsilon}}(t')) dt' \bar{1}. \quad (\text{V.7})$$

En considérant le matériau comme incompressible, seule la partie déviatorique est prise en compte telle que l'équation V.6 devienne après intégration par parties :

$$\bar{\sigma}^D(t) = 2\mu_0 \bar{\varepsilon}^D(t) - \int_0^t 2\dot{\mu}(t-t') \bar{\varepsilon}^D(t') dt'. \quad (\text{V.8})$$

et par un simple changement de variable :

$$\bar{\sigma}^D(t) = 2\mu_0 \bar{\varepsilon}^D(t) - \int_0^t 2\dot{\mu}(t') \bar{\varepsilon}^D(t-t') dt'. \quad (\text{V.9})$$

Pour pouvoir facilement intégrer la loi de comportement viscoélastique dans des calculs prédictifs, il est préférable de disposer d'un modèle pour approcher les fonctions de relaxation (ou de fluage). Pour ce faire, on utilise des modèles rhéologiques ou fractionnaires. Quelques indications sur l'application de ces modèles sont données en ANNEXE C.

### • Extension de la viscoélasticité linéaire aux grandes déformations

En 1957, RIVLIN et GREEN présentèrent une formulation dans laquelle les contraintes sont développées en un polynôme de fonctionnelles linéaires de l'histoire des déformations : l'approche par intégrale héréditaire multiple (MHI) [CHRISTENSEN, 1971]. Il s'agit de la loi de comportement non-linéaire par approche héréditaire la plus générale pour un matériau viscoélastique homogène. Dans le cas monodimensionnel, la loi de comportement peut s'écrire comme une série infinie dont voici ses trois premiers termes :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{D\varepsilon(t'_1)}{Dt'_1} \mu_1(t-t'_1) dt'_1 \\ &+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{D\varepsilon(t'_1)}{Dt'_1} \frac{D\varepsilon(t'_2)}{Dt'_2} \mu_2(t-t'_1, t-t'_2) dt'_1 dt'_2 \\ &+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{D\varepsilon(t'_1)}{Dt'_1} \frac{D\varepsilon(t'_2)}{Dt'_2} \frac{D\varepsilon(t'_3)}{Dt'_3} \mu_3(t-t'_1, t-t'_2, t-t'_3) dt'_1 dt'_2 dt'_3 \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

---

(2). On remarquera que l'on aurait pu exprimer la loi de comportement à l'aide d'une fonction de fluage.

où les  $\mu_i(t)$  sont les fonctions de relaxation de l'ordre  $i$  du matériau. On peut alors appliquer divers modèles pour représenter ces fonctionnelles. Cependant, cela présente plusieurs inconvénients : ces fonctions ne sont pas des propriétés intrinsèques du matériau puisqu'elles dépendent de l'ordre auquel la série est tronquée et leur nature multi-dimensionnelle rend leur détermination difficile. ROUSSEAU *et al.* [2002] utilisent cette méthode dans le cas de sollicitations sinusoïdales en cisaillement associée aux modèles rhéologiques et les auteurs DARVISH et CRANDALL [2001] quant à eux pour caractériser la réponse d'un matériau sous sollicitation cyclique sinusoïdale composée de plusieurs harmoniques.

Nous partons des exemples de modèles présentés par MÉO [2000] et dont l'élaboration a été réalisée à partir d'une généralisation du principe de superposition de BOLTZMANN (*cf.* TAB. V.1).

Modèle	Formulation du comportement
<b>F.L.V.</b> Finite Linear Viscoelasticity [COLEMAN et NOLL, 1961]	$\bar{\bar{R}}^T(t) \cdot \bar{\sigma}(t) \cdot \bar{\bar{R}}(t) = -p(t)\bar{\bar{1}} + f(\bar{\bar{E}}(t)) + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{K}}(\bar{\bar{E}}(t), s) : \bar{\bar{E}}_d(t, s) ds,$ Notion de mémoire évanescence des élastomères avec $\bar{\bar{E}}_d(s) = \bar{\bar{E}}(t - s) - \bar{\bar{E}}(t)$ et $f$ une loi hyperélastique.
<b>M.F.L.V.</b> Modified Finite Linear Viscoelasticity [MORMAN, 1988]	$\bar{\bar{R}}^T(t) \cdot \bar{\sigma}(t) \cdot \bar{\bar{R}}(t) = -p(t)\bar{\bar{1}} + f(\bar{\bar{E}}(t)) + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{K}}_0(t, s) : \bar{\bar{H}}_d(t, s) ds,$ Introduction d'une mesure généralisée des déformations évanescences, $\bar{\bar{H}}_d(t, s) = \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}(t - s)) - \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}(t))$ .
<b>B.K.Z.</b> [Bernstein, Kearsley, et Zapas, 1963]	$\bar{\sigma}(t) = -p(t)\bar{\bar{1}} + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{F}}^{-1}(t') \cdot \frac{\partial W(\bar{\bar{E}}(t, t'))}{\partial \bar{\bar{E}}(t, t')} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}(t') dt',$ où $W$ est un potentiel.

TABLEAU V.1 – *Table non exhaustive des principaux exemples de lois de comportements héréditaires en grandes déformations.*

On peut observer à travers la littérature un nombre important de modèles qui dérivent du modèle de BERNSTEIN *et al.* [1963].

Ainsi, on peut citer les modèles suivants :

- **Le modèle de SIMO** : SIMO [1987] développe un modèle basé sur une décomposition additive des contraintes en contrainte initiale (élastique) et hors-équilibre (viscoélastique) associée à un découplage des réponses déviatorique et isochore tel que  $\bar{\bar{F}} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\bar{F}}$ . Ce modèle aboutit à une formulation fonctionnelle tout en s'appuyant sur une approche par variables internes. L'énergie libre postulée est de la forme :

$$\psi(\bar{\bar{E}}, \bar{\bar{\mathcal{A}}}_v) = \psi_{vol}(J) + \psi(\bar{\bar{E}}) - \bar{\bar{\mathcal{A}}}_v : \bar{\bar{E}} + \psi_v(\bar{\bar{\mathcal{A}}}_v) \quad (\text{V.11})$$

où  $\bar{\bar{E}}$  est le tenseur de GREEN-LAGRANGE et la variable interne  $\bar{\bar{\mathcal{A}}}_v$  est un tenseur associé au caractère visqueux du matériau. Il suppose alors que cette variable interne obéit à

une équation différentielle linéaire semblable aux équations d'évolution de la viscoélasticité linéaire. Ce modèle possède l'avantage de ne pas être restreint à l'hypothèse d'isotropie de la réponse. Il obtient alors en description lagrangienne, la loi de comportement suivante :

$$\bar{\bar{S}} = Jp\bar{\bar{C}}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \left[ \int_0^t a + (1-a)e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{d}{dt'} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}} dt' \right]^D, \quad (\text{V.12})$$

où  $p$  est homogène à une pression hydrostatique<sup>(3)</sup>,  $\tau$  est le temps de relaxation et  $a$  est un coefficient tel que  $a \in [0..1]$  permettant d'évoluer d'un noyau de relaxation caractérisé par un modèle de MAXWELL ( $a = 0$ ) vers un élément de type ressort ( $a = 1$ ).

- **Le modèle K-BKZ** : Parmi les lois de comportement macroscopiques, les modèles du type K-BKZ sont attractifs en raison de leur forme équivalente à celle prévue par la dynamique moléculaire. En effet, ils reposent sur la notion de réseau macromoléculaire. La disparition des points ou noeuds de réticulation du réseau au cours du temps étant accélérée par la déformation.

Cette approche consiste à introduire la non-linéarité dans la formulation intégrale de la loi de comportement par le biais d'une fonction scalaire  $h(I_1, I_2)$  dite d'amortissement qui ne dépend que des invariants  $I_1$  et  $I_2$  du tenseur des déformations de FINGER noté  $\bar{\bar{C}}_t^{-1}(t')$ .

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = \int_{-\infty}^t M(t-t') h(I_1, I_2) \bar{\bar{C}}_t^{-1}(t') dt', \quad (\text{V.13})$$

où  $M(t-t')$  est la fonction mémoire calculée à partir du spectre des temps de relaxation ( $G_i, \tau_i$ ) de la viscosité linéaire (cf. l'utilisation du modèle de MAXWELL généralisé en petites déformations) telle que :

$$M(t-t') = \sum_i \left[ \frac{G_i}{\tau_i} \exp \left( -\frac{t-t'}{\tau_i} \right) \right], \quad (\text{V.14})$$

En cisaillement simple, la contrainte devient :

$$\sigma_{12}(t) = G_0(t) h(\gamma(t)) \gamma(t) + \int_0^t M(t-t') h(\gamma(t) - \gamma(t')) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t')) dt', \quad (\text{V.15})$$

Les auteurs CARTAULT *et al.* [2001] choisissent ensuite une forme de fonction d'amortissement licite que pour le cisaillement :

$$h(I_1, I_2) = A \exp \left( \alpha \sqrt{I_1 - 3} \right) + (1-A) \exp \left( \beta \sqrt{I_1 - 3} \right), \quad (\text{V.16})$$

avec  $A$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  paramètres du modèle.

---

(3).  $p$  est une pression hydrostatique qui vaut  $\frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J}$  dans le cas compressible et indéterminée sinon.

### V.2.1.b Formulations différentielles

La formulation différentielle n'est pas fondée sur une extension de la viscoélasticité linéaire mais sur la théorie de l'état local associée aux relations d'ONSAGER et au cadre des matériaux standards généralisés dont les différents travaux de SIDOROFF [1974, 1975a,b, 1976, 1977], GERMAIN [1986] et HALPHEN et NGUYEN QUOC SON [1975] ont en grande partie contribué à la mise en place.

Si l'on classe les matériaux selon la qualité de leur mémoire, les matériaux viscoélastiques appartiennent à la classe des matériaux à mémoire continue (*cf.* TAB. V.2). Leur comportement est alors intermédiaire entre celui du solide élastique et du fluide.

Type de mémoire	Instantanée	Continue	Privilégiée
Type de matériau	Fluide visqueux	Viscoélastique	Solide élastique

TABLEAU V.2 – *Tableau représentatif du type de mémoire selon les matériaux.*

Le matériau à mémoire continue nécessite une extension des notions de thermodynamique classique. GERMAIN [1986] propose deux théories l'une dite rationnelle et l'autre différentielle qu'il considère comme plus prometteuse et qui se développe autour de l'état local. Le cadre thermodynamique en grandes déformations associé à cette hypothèse est introduit en ANNEXE A.3.

L'introduction de la notion d'états intermédiaires décrite en ANNEXE A.5 permet de réaliser une généralisation aux grandes déformations des modèles rhéologiques (*cf.* FIG. V.1) présentés en ANNEXE C.1.3. De nombreux auteurs revoient et discutent ces modèles [HALPHEN et NGUYEN QUOC SON, 1975 ; LEONOV, 1992 ; JOHNSON *et al.*, 1995 ; HAUPT *et al.*, 2000 ; BOUKAMEL *et al.*, 2000 ; HUBER et TSAKMAKIS, 2000 ; LAHELLEC, 2001].

Il reste alors à déterminer des formes d'expressions représentatives de la dissipation. Une des conditions suffisantes pour vérifier le second principe est l'utilisation des relations d'ONSAGER. En effet, ces relations permettent de relier linéairement les forces thermodynamiques aux flux thermodynamiques et ainsi d'appliquer le principe de normalité en se plaçant dans le cadre des matériaux standards généralisés (*cf.* § A.3). Ainsi, de nombreuses formulations de la dissipation découlent de ces relations.

#### • Application de la théorie de LUBLINER

- **Modèle à un état intermédiaire** : HUBER et TSAKMAKIS [2000] donnent une description détaillée des équations constitutives des modèles unitaires de ZENER (*cf.* FIG. V.1(c)) et de POYNTING-THOMSON (*cf.* FIG. V.1(d)). Se fondant sur la théorie en grandes défor-



mations du comportement élastoplastique développée par LUBLINER en 1986, ils posent la dissipation sous la forme  $(\bar{\bar{P}} - \bar{\bar{P}}_i) : \bar{\bar{D}}_v \geq 0$ , où  $\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{C}}_e \cdot \bar{\bar{\pi}}$  et  $\bar{\bar{P}}_i = \bar{\bar{C}}_e \cdot \bar{\bar{\pi}}_i$  avec "i=équilibre" ou "i=statique" respectivement pour les modèles de ZENER ou de POYNTING-THOMSON. Les auteurs décomposent l'énergie libre  $\psi$  en une partie élastique et une autre visqueuse telle que  $\psi = \psi_e(\bar{\bar{E}}) + \psi_v(\bar{\bar{E}}_e)$  pour le modèle de ZENER et  $\psi = \psi_e(\bar{\bar{E}}_e) + \psi_v(\bar{\bar{E}}_v)$  pour le modèle de POYNTING-THOMSON. Cette introduction d'état intermédiaire visqueux, *i.e.*  $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \bar{\bar{F}}_v$ , permet alors de formuler les équations constitutives suivantes dans le cas d'un matériau incompressible en description eulérienne :

*Modèle de ZENER*

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = \underbrace{2\rho \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - 2\rho \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1}}_{\bar{\bar{\sigma}}_{\text{équilibre}}} + 2\rho \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - 2\rho \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} - p\bar{\bar{1}}, \\ \dot{\bar{\bar{B}}}_e = \bar{\bar{B}}_e \bar{\bar{L}}^T + \bar{\bar{L}} \bar{\bar{B}}_e - 2\bar{\bar{F}}_e \bar{\bar{D}}_v \bar{\bar{F}}_e^T, \\ \bar{\bar{F}}_e \bar{\bar{D}}_v \bar{\bar{F}}_e^T = \frac{1}{\eta} \bar{\bar{B}}_e (\bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma}}_{\text{équilibre}})^D. \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

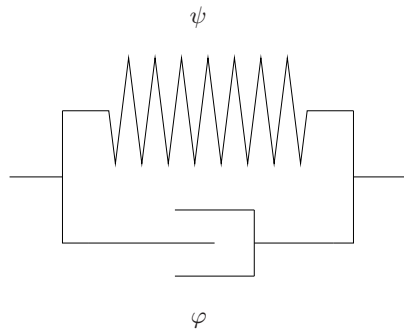
*Modèle de POYNTING-THOMSON*

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = \underbrace{2\rho \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - 2\rho \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1}}_{\bar{\bar{\sigma}}_{\text{statique}}} - p\bar{\bar{1}}, \\ \dot{\bar{\bar{B}}}_e = \bar{\bar{B}}_e \bar{\bar{L}}^T + \bar{\bar{L}} \bar{\bar{B}}_e - 2\bar{\bar{F}}_e \bar{\bar{D}}_v \bar{\bar{F}}_e^T, \\ \bar{\bar{F}}_e \bar{\bar{D}}_v \bar{\bar{F}}_e^T = \frac{1}{\eta} \left( \bar{\bar{B}}_e \bar{\bar{\sigma}}_{\text{statique}}^D - \left( 2\rho \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} (\bar{\bar{B}} \bar{\bar{B}}_e^{-1})^D \bar{\bar{B}}_e - 2\rho \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} (\bar{\bar{B}}_e \bar{\bar{B}}^{-1})^D \bar{\bar{B}}_e \right) \right). \end{cases} \quad (\text{V.18})$$

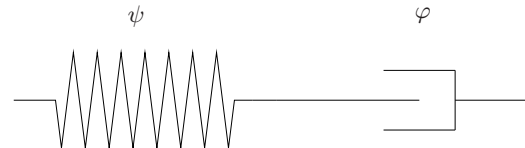
- **Modèle à plusieurs états intermédiaires** : Motivés par la structure d'un modèle de MAXWELL généralisé (*cf.* FIG. V.1(e)), les auteurs HAUPT *et al.* [2000] et LION [1998] décomposent cette fois-ci l'énergie libre  $\psi$  et la contrainte  $\bar{\bar{S}}$  en une partie à l'équilibre et une autre hors-équilibre, comme suit :

$$\psi = \psi_e(\bar{\bar{E}}) + \sum_{k=1}^N \psi_{v_k}(\bar{\bar{E}}_{e_k}), \quad \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_e + \sum_{k=1}^N \bar{\bar{S}}_{v_k} - p\bar{\bar{C}}^{-1}. \quad (\text{V.19})$$

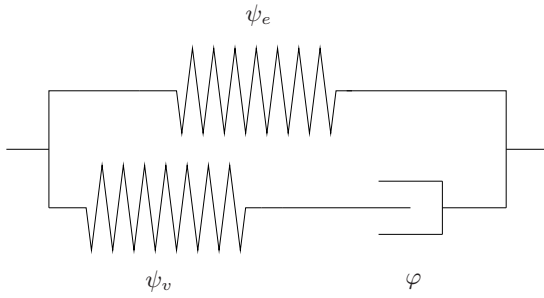
$\psi_e$  et  $\bar{\bar{S}}_e$  décrivent les propriétés à l'équilibre du matériau. La partie hors-équilibre est la somme des énergie libre  $\psi_{v_k}$  fonctions des tenseurs de déformations élastiques définis par une décomposition en  $N$  états intermédiaires. Le concept de variables duales décrit par HAUPT *et al.* [2000] nous donne alors les contraintes à l'équilibre et hors-équilibre ainsi que les lois d'évolutions suivantes :



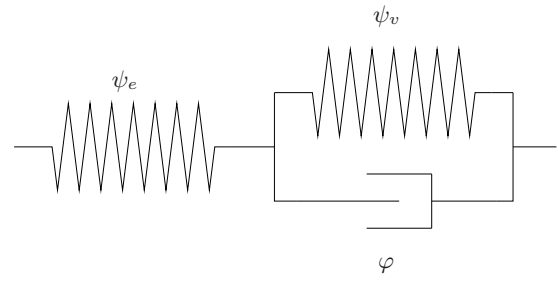
(a) Modèle de KELVIN-VOIGT.



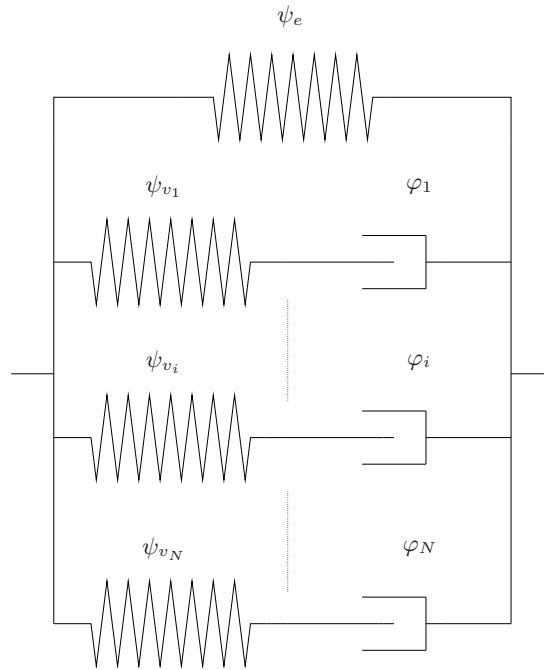
(b) Modèle de MAXWELL.



(c) Modèle de ZENER.



(d) Modèle de POYNTING-THOMSON.



(e) Modèle de MAXWELL généralisé.

FIGURE V.1 – *Energies libres spécifiques et pseudo-potentiels de dissipation associés aux modèles rhéologiques viscoélastiques usuels.*

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}}_e = \rho_0 \frac{\partial \psi_e}{\partial \bar{\bar{E}}}, \\ \bar{\bar{S}}_{v_k} = \rho_0 \bar{\bar{F}}_{v_k}^{-1} \frac{\partial \psi_{v_k}}{\partial \bar{\bar{E}}_{e_k}} \bar{\bar{F}}_{v_k}^{-T} \quad \forall k \in [1..N], \\ \dot{\bar{\bar{C}}}_{v_k} = \frac{4\rho}{\eta_k} \bar{\bar{F}}_{v_k}^T \left( \bar{\bar{C}}_{e_k} \frac{\partial \psi_{v_k}}{\partial \bar{\bar{C}}_{e_k}} \right) \bar{\bar{F}}_{v_k} \quad \forall k \in [1..N]. \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

### • Postulat d'un pseudo-potentiel quadratique

- **Modèles à un état intermédiaire** : LE TALLEC et RAHIER [1994] obtiennent une description lagrangienne d'un matériau isotrope et incompressible en mettant en œuvre une généralisation du modèle de ZENER (*cf.* FIG. V.1(c)). En choisissant  $\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{C}}_v$  comme variables internes, on obtient les lois de comportement et complémentaire suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{C}}} - p\bar{\bar{C}}^{-1} = 2\rho_0 \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial \bar{\bar{C}}} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \bar{\bar{C}}} \right) - p\bar{\bar{C}}^{-1} \\ \left[ \bar{\bar{C}}_v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial \bar{\bar{C}}_v} \right]^D = 0. \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

Par la suite, les auteurs orientent leur choix sur une forme hyperélastique neohookeenne des énergies libres et quadratique du potentiel de dissipation telle que :

$$\varphi = \frac{\eta}{2} \text{tr} \bar{\bar{D}}_v^2 = \frac{\eta}{8} \text{tr} \left( \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \dot{\bar{\bar{C}}}_v \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \dot{\bar{\bar{C}}}_v \right), \quad (\text{V.22})$$

BOUKAMEL *et al.* [2001] ; MÉO [2000] proposent d'utiliser le modèle de POYNTING-THOMSON (*cf.* FIG. V.1(d)). Ils obtiennent alors le système d'équations suivant, en formulation mixte :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) - p\bar{\bar{F}}^{-T} \\ \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left( \left( \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{C}}_v \right]^D = 0. \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

Ils postulent alors une forme de pseudo-potentiel quadratique telle que :

$$\varphi = \frac{1}{2} \eta_v \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \dot{\bar{\bar{C}}}_v = \frac{\eta_v}{2} \text{tr} \left( \dot{\bar{\bar{C}}}_v^2 \right) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} = \eta_v \dot{\bar{\bar{C}}}_v. \quad (\text{V.24})$$

BOUKAMEL *et al.* [1997] effectuent une comparaison des formes quadratiques pour le pseudo-potentiel de dissipation exprimées en  $\dot{\bar{\bar{C}}}_v$  et  $D_v$ .

• **Modèle de viscosité non-linéaire**

- **Viscosité fonction des taux de déformations** : LAHELLEC [2001] postule sur une loi d'évolution de  $\eta$  en fonction de "la vitesse de chargement". Il observe l'évolution de  $\eta$  en fonction des trois mesures de taux de déformation,  $\bar{D}_v : \bar{D}_v$ ,  $\dot{\bar{C}}_v : \dot{\bar{C}}_v$  et  $\bar{D} : \bar{D}$  sachant que les deux premières mesures sont moyennées sur l'ensemble des cycles car leurs valeurs ne sont pas constantes au cours des simulations. Il trouve alors les lois suivantes :

$$\eta(\bar{X}) = \exp(b_1 + b_2 \log(\bar{X} : \bar{X})), \quad \text{avec} \quad \bar{X} = \bar{D}_v, \dot{\bar{C}}_v \text{ ou } \bar{D} \quad (\text{V.25})$$

Les pseudo-potentiels de dissipation correspondant à ces formes d'évolution sont alors :

$$\begin{cases} \varphi_1(\dot{\bar{C}}_v) = \int \exp(b_1 + b_2 \log(\bar{D}_v : \bar{D}_v)) \dot{\bar{C}}_v : d\dot{\bar{C}}_v, \\ \varphi_2(\dot{\bar{C}}_v) = \int \exp(b_1 + b_2 \log(\dot{\bar{C}}_v : \dot{\bar{C}}_v)) \dot{\bar{C}}_v : d\dot{\bar{C}}_v, \\ \varphi_3(\bar{D}, \dot{\bar{C}}_v) = \exp(b_1 + b_2 \log(\bar{D} : \bar{D})) \dot{\bar{C}}_v : \dot{\bar{C}}_v. \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

Il teste donc les trois formes de pseudo-potentiel de dissipation sur des essais de cisaillement cyclique et trouve que  $\varphi_3$  représente le mieux le matériau en validant sur trois vitesses de chargement.

- **Notion de Thixotropie** : Une substance est dite "thixotrope" lorsque, soumise à une agitation, sa viscosité apparente diminue en fonction de la durée et de l'intensité de l'agitation, et que sa viscosité apparente initiale réapparaît après un certain temps de repos. Les auteurs MUJUMDAR *et al.* [2002] ; LION [1998] ; BARNES [1997] utilisent cette notion pour caractériser le comportement d'un élastomère.
  - BARNES [1997] montre un modèle de viscosité non-linéaire tel que,  $\eta(t) = \eta_\infty + (\eta_\infty - \eta_0) \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^r}\right)$ , où  $\eta_\infty$  viscosité après chargement à l'infini,  $\eta_0$  viscosité au début du chargement,  $\tau$  constante de temps et  $r$  constante adimensionnée (souvent égale à 1). Il en déduit pour un matériau viscoélastique thixotrope, une forme du module de gain telle que  $G'(t) = G'_\infty + (G'_\infty - G'_0)e^{at^b}$ , avec  $a, b$  paramètres.
  - LION [1998] propose une loi d'évolution de viscosité fonction d'une variable interne  $\alpha$  dépendant elle même du temps de la forme,  $\eta(\alpha(t)) = \eta_0 e^{(-\beta_\alpha(\alpha(t) - p_0))}$  où  $\beta_\alpha$ ,  $\eta_0$  et  $p_0$  paramètres.

### V.2.2 Le comportement élastoplastique : frottement interne non visqueux

Certains auteurs tels que KALISKE et ROTHERT [1999] ; MIEHE et KECK [2000] ; CANTOURNET [2002] ; RAMRAKHYANI et SMITH [2004] considèrent que la dissipation observée lors du chargement cyclique d'un élastomère chargé peut provenir non pas de la dépendance du comportement par rapport au temps mais par rapport à l'amplitude de chargement. Ce caractère du comportement des élastomères est appelé plasticité par extension de la notion appliquée aux métaux.

Partant du constat expérimental qui nous apprend que l'amortissement est d'autant plus important que le matériau est chargé (*cf.* § I.5), les auteurs CANTOURNET et DESMORAT [2003] ; BESDO et IHLEMANN [2001] nous proposent que les mécanismes physiques responsables du comportement élastoplastique des élastomères sont les glissements et rupture des contacts charges/charges et charges/chaînes. On peut alors introduire la notion de frottement interne non visqueux.

A travers la littérature on peut distinguer trois familles de modélisation

- les modèles basés sur la construction d'un potentiel caractérisant les matériaux hystérétiques sans viscosité [CANTOURNET et DESMORAT, 2003],
- les modèles rhéologiques élastoplastiques s'appuyant sur le modèle élastique parfaitement plastique de SAINT-VENANT [MIEHE et KECK, 2000],
- les modèles de friction où le frottement est considéré comme une amélioration du modèle de COULOMB [SJÖBERG, 2002 ; SAAD, 2003].

#### V.2.2.a Potentiels de matériaux hystérétiques sans viscosité

Cette méthode est basée sur les modèles qui permettent de rendre compte du phénomène d'hystérésis par glissement et frottement interne de fissurations microscopiques. Outre les élastomères, d'autres matériaux exhibent des boucles d'hystérésis tels que le béton, les matériaux composites ou les métaux. Les auteurs CANTOURNET et DESMORAT [2003] précisent que, dans le cadre des petites déformations, une forme générale de l'expression de l'énergie libre caractéristique de ces matériaux peut s'écrire comme suit :

$$\rho\psi = A\varepsilon^2 + B(\varepsilon - \varepsilon_a)^2 + C\alpha^2 \quad (\text{V.27})$$

- où les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$  dépendent d'une fonction d'une variable d'endommagement,
- $\alpha$  et  $\varepsilon_a$  sont des variables internes représentant respectivement le glissement interne dû à la présence de micro-fissures et la déformation anélastique du matériau,
- le terme  $C\alpha^2$  représente l'énergie stockée au sein du Volume Élémentaire Représentatif (VER) par glissements des lèvres des fissures microscopiques.

CANTOURNET [2002] utilise cette forme synthétique pour proposer des modèles de matériaux hyperélastiques avec frottement interne non-visqueux. Le cadre des grandes déformations oblige

alors l'auteur à décomposer le potentiel d'énergie libre (formulation lagrangienne) en une énergie de type hyperélastique  $\rho_0\psi_1(\bar{\bar{E}})$ , une autre de type hyperélastique  $\rho_0\psi_2(\bar{\bar{E}} - \bar{\bar{E}}_a)$  avec  $\bar{\bar{E}}_a$  comme déformation anélastique et enfin l'énergie stockée par glissement supposée de forme quadratique fonction d'une variable de glissement interne  $\bar{\bar{\alpha}}$ .

L'auteur peut donc exprimer un potentiel d'énergie libre des matériaux hystérétiques sans viscosité en introduisant un paramètre matériau,  $\mathcal{C}_f$ , soit :

$$\rho_0\psi = \rho_0\psi_1(\bar{\bar{E}}) + \rho_0\psi_2(\bar{\bar{E}} - \bar{\bar{E}}_a) + \frac{1}{2}\mathcal{C}_f\bar{\bar{\alpha}} : \bar{\bar{\alpha}}, \quad (\text{V.28})$$

L'utilisation de l'équation V.28 dans le cadre thermodynamique en grandes déformations défini en ANNEXE A.3 permet alors d'écrire la loi de comportement et les lois complémentaires en formulation lagrangienne suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_1 + \bar{\bar{S}}_2 - p\bar{\bar{C}}^{-1} \\ \bar{\bar{S}}_1 = \rho_0 \frac{\partial \psi_1(\bar{\bar{E}})}{\partial \bar{\bar{E}}}, \\ \bar{\bar{S}}_2 = \rho_0 \frac{\partial \psi_2(\bar{\bar{E}} - \bar{\bar{E}}_a)}{\partial \bar{\bar{E}}} = - \frac{\psi_2(\bar{\bar{E}} - \bar{\bar{E}}_a)}{\partial \bar{\bar{E}}_a} \\ \bar{\bar{X}} = \mathcal{C}_f\bar{\bar{\alpha}}. \end{cases} \quad (\text{V.29})$$

où  $\bar{\bar{X}}$  représente les micro-contraintes résiduelles.

Les lois d'évolution du frottement interne (formalisme des matériaux standards généralisés) sont décrites à partir d'une fonction critère  $f$  similaire à la surface seuil de plasticité<sup>(4)</sup>. En définissant un seuil de frottement  $\sigma_s$  homogène à une contrainte, les auteurs proposent d'utiliser la forme suivante  $f = \|\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{X}}\| - \sigma_s$  où  $\|\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{X}}\| = \sqrt{(\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{X}}) : (\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{X}})}$ . Via l'introduction d'un paramètre  $b_f$ , ils choisissent d'utiliser un potentiel de dissipation  $\varphi_f$  (on applique le principe de normalité à ce potentiel au lieu de la fonction seuil) de la forme :

$$\varphi_f = f + \frac{1}{2\mathcal{C}_f}b_f\bar{\bar{X}} : \bar{\bar{X}}, \quad (\text{V.30})$$

et introduisent un multiplicateur de frottement  $\dot{\mu}$  qui nous permet l'écriture des lois d'évolution suivante :

$$\dot{\bar{\bar{E}}}_a = \dot{\mu} \frac{\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{X}}}{\|\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{X}}\|}, \quad (\text{V.31})$$

$$\dot{\bar{\bar{\alpha}}} = \dot{\bar{\bar{E}}}_a - \frac{b_f}{\mathcal{C}_f}\bar{\bar{X}}\dot{\mu}. \quad (\text{V.32})$$

---

(4). si  $f$  est une fonction critère similaire à la surface seuil de plasticité (§ C.1.3.e) alors

- si  $f < 0$ , il n'y a pas de frottement interne,
- si  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ , il existe un frottement interne.

De la relation V.31 on déduit que  $\dot{\mu} = \|\dot{\bar{E}}_a\|$  et en introduisant l'équation V.32 dans V.29, on obtient la loi d'évolution des micro-contraintes qui s'apparente à la loi de ARMSTRONG-FREDERICK traduisant l'écrouissage cinématique non linéaire des métaux :

$$\dot{\bar{X}} = \mathcal{C}_f \dot{\bar{E}}_a - b_f \bar{X} \|\dot{\bar{E}}_a\|. \quad (\text{V.33})$$

### V.2.2.b Modèles rhéologiques élastoplastiques

Pour mieux appréhender cette famille de modèles rhéologiques composés d'associations diverses de ressorts et de patins, le lecteur pourra préalablement consulter l'introduction des modèles rhéologiques élastoplastiques en petites déformations disponible en ANNEXE C.1.

#### • Les modèles élastoplastiques écrouissables de type unitaire

- **Application en petites déformations** : en petites déformations, la théorie élastoplastique avec écrouissage isotrope et l'utilisation du critère de VON MISES s'obtient, dans le cadre des matériaux standards généralisés, à partir des équations,  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_e + \bar{\varepsilon}_p$  et  $\psi = \psi_e(\bar{\varepsilon}_e) + \psi_p(\alpha_p)$  où  $\alpha_p$  ( $\alpha_i$  dans l'équation A.39) est la variable interne scalaire d'écrouissage isotrope avec comme variable force scalaire associée,  $Y$  ( $\mathcal{A}_i$  dans l'équation A.39). L'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM s'écrit alors :

$$\Phi^{int} = \bar{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}}_p - Y \dot{\alpha}_p \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{Principe de normalité}} \quad \begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{\partial \psi_e(\bar{\varepsilon}_e)}{\partial \bar{\varepsilon}_e} \\ Y = \frac{\partial \psi_p(\alpha_p)}{\partial \alpha_p} \end{cases} \quad (\text{V.34})$$

Il reste donc à fixer une fonction seuil et la loi d'évolution sous la forme :

$$f(\bar{\sigma}, Y) = \|\bar{\sigma}\| - Y \leq 0 \text{ et } \begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{f(\bar{\sigma}, Y)}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\bar{\sigma}^D}{\|\bar{\sigma}^D\|} \Rightarrow \dot{\lambda} = \|\dot{\bar{\varepsilon}}_p\| \\ \dot{\alpha}_p = -\dot{\lambda} \frac{f(\bar{\sigma}, Y)}{\partial Y}. \end{cases} \quad (\text{V.35})$$

On propose d'utiliser le modèle élastoplastique écrouissable ② (cf. FIG. V.2(c)). L'utilisation de ce type de modèle permet de calculer la déformation permanente  $\varepsilon_p$  après un essai de charge-décharge telle que :

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_s k_e}{k_p(k_e + k_p)} \quad (\text{V.36})$$

A partir de ce résultat, CANTOURNET [2002] propose de postuler un seuil de plasticité  $\sigma_s$  dépendant de la déformation maximale  $\varepsilon_{max}$  et de la largeur de la boucle  $\delta e$  tel que :

$$\begin{cases} \sigma_s(\varepsilon_{max}, \delta e) = \frac{1}{2} \left[ (\delta e + \varepsilon_{max}) k_p - \sigma_s \left( \frac{k_e}{k_e + k_p} \right) \right], \\ \varepsilon_p(\varepsilon_{max}, \delta e) = \frac{k_e}{k_p(k_e + k_p)} (\varepsilon_{max} - \delta e) - \frac{k_e}{(k_e + k_p)^2} \sigma_s. \end{cases} \quad (\text{V.37})$$

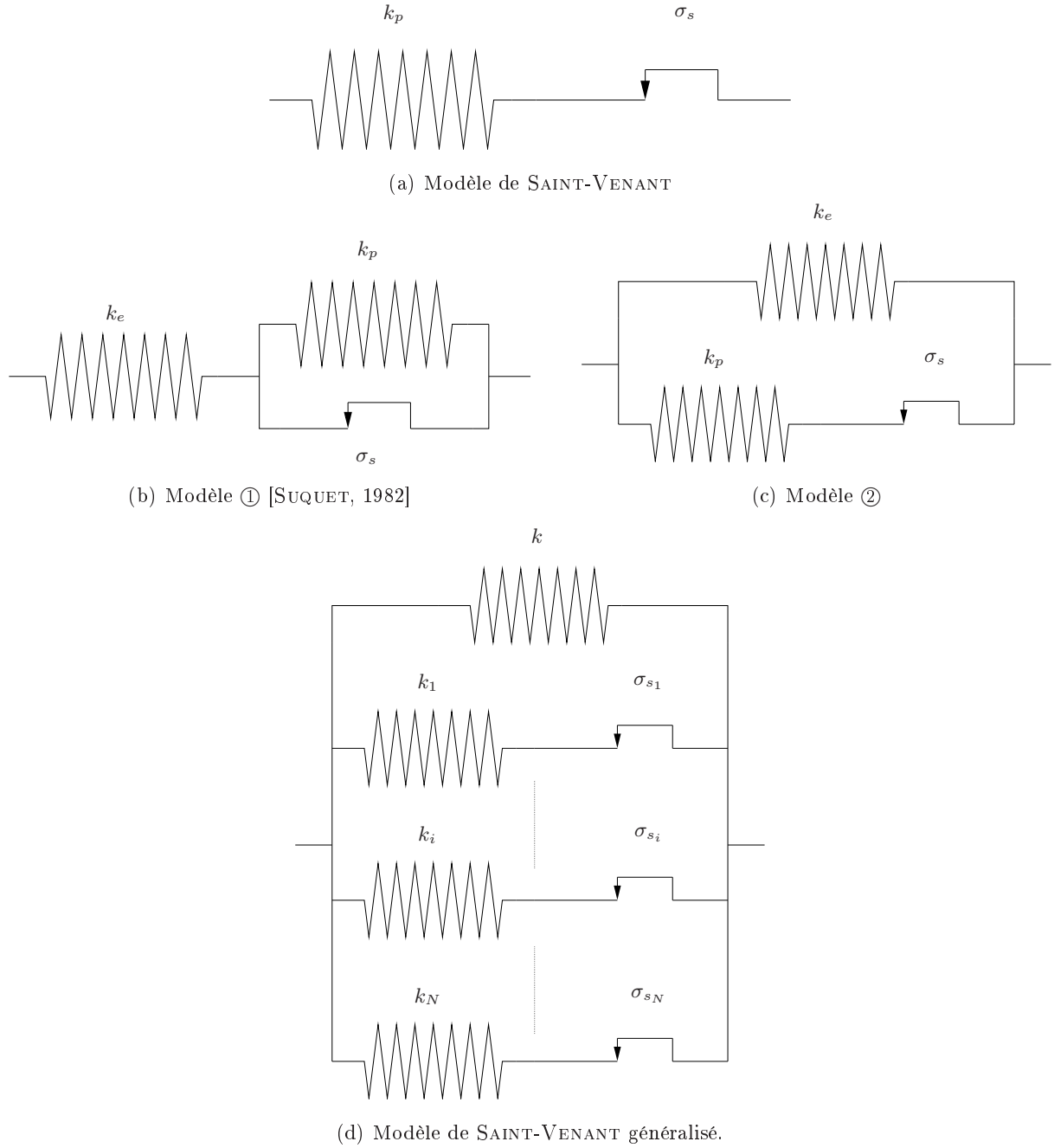


FIGURE V.2 – Modèles rhéologiques élastoplastiques usuels dans le cas monodimensionnel.



Mais le problème de ce type de modèle est qu'il traduit une évolution de  $\varepsilon_p$  proportionnelle à  $\varepsilon_{max}$  ce qui est généralement contraire aux observations expérimentales (*cf.* FIG. III.18(a) et FIG. III.16 en traction uniaxiale, FIG. III.19 et FIG. III.20(a) en double cisaillement).

- **Généralisation aux grandes déformations** : la littérature [SIDOROFF, 1982 ; MIEHE et KECK, 2000 ; NEDJAR, 2002] propose un large éventail de modèles rhéologiques élasto-plastiques écrouissables généralisés aux grandes déformations en introduisant une ou plusieurs variables internes par le biais d'états intermédiaires plastiques (*cf.* § A.4). On postule l'existence d'un tenseur gradient de transformation plastique  $\bar{\bar{F}}_p$  tel que  $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_p$ . L'application au cadre thermodynamique décrit en ANNEXE A.3 permet alors l'expression de la contrainte et de la dissipation intrinsèque en configuration eulérienne suivante :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_e = 2\rho\bar{\bar{B}}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}_e}, \\ \Phi^{int} = \bar{\sigma}_e : \bar{\bar{D}}_p^o - Y\dot{\alpha}_p \geq 0. \end{cases} \quad (V.38)$$

où  $\bar{\bar{D}}_p^o$  s'obtient par rotation élastique de  $\bar{\bar{D}}_p$  mesure eulérienne du taux de déformation plastique (respect du principe d'objectivité). A ce stade, il reste à choisir une fonction seuil par exemple VON MISES telle que  $f(\bar{\sigma}, Y) = \|\bar{\sigma}^D\| - Y \leq 0$  et les lois d'évolution :

$$\begin{cases} \bar{\bar{D}}_p^o = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\bar{\sigma}, Y)}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\bar{\sigma}^D}{\|\bar{\sigma}^D\|} \Rightarrow \dot{\lambda} = \|\bar{\bar{D}}_p^o\|, \\ \dot{\alpha}_p = -\dot{\lambda} \frac{f(\bar{\sigma}, Y)}{\partial Y}. \end{cases} \quad (V.39)$$

LION [1998] ; MIEHE et KECK [2000] présentent une généralisation du modèle ② aux grandes déformations en utilisant un formalisme lagrangien. Ainsi, ils introduisent une variable interne de plasticité et obtiennent les lois d'évolution suivantes :

- MIEHE et KECK [2000]

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\bar{H}}\| \text{ avec } \bar{H} = \frac{1}{2} \ln(\bar{C}). \quad (V.40)$$

- LION [1998]

$$\dot{q} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\bar{\bar{E}} : \dot{\bar{\bar{E}}}}{\|\bar{\bar{E}}\|} \text{ si } f(\bar{\bar{E}}) = 0 \text{ et } \frac{\partial f(\bar{\bar{E}})}{\partial \bar{\bar{E}}} : \dot{\bar{\bar{E}}} \\ \frac{1}{\tau_q} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \|\bar{\bar{E}}\| - q \right) \text{ sinon.} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} f(\bar{\bar{E}}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\bar{\bar{E}}\| - q, \\ \|\bar{\bar{E}}\| = \sqrt{\bar{\bar{E}} : \bar{\bar{E}}}. \end{cases} \quad (V.41)$$

### • Les modèles élastoplastiques écrouissables multi-branches

- **Application en petites déformations** : dans le cadre des petites déformations, LE-MAÎTRE et CHABOCHE [1996] proposent le modèle de SAINT-VENANT généralisé (*cf.* FIG. V.2(d)). On comprend alors que l'application d'une limite d'élasticité différente sur chaque patin permet de simuler les différents types de glissements et ruptures qui ont lieu à des chargements macroscopiques différents [OLSSON et AUSTRELL, 2001]. Dans un cas monodimensionnel, on peut observer FIGURE V.3 sa réponse en contrainte-déformation à un essai de montée en charge.

LESIEUTRE et GOVINDSWAMY [1996] ; BRACKBILL *et al.* [2000] ; RAMRAKHYANI et SMITH [2004] proposent de faire tendre le nombre de branches vers l'infini (*i.e.*  $N \rightarrow \infty$ ). Ils commencent par supposer que pour une sollicitation donnée toutes les branches ne sont pas actives. Ainsi, ils suppriment la branche élastique pure de raideur  $k$  et en posant  $M$  le nombre de branches actives, ils expriment le taux de branches actives relatif au nombre de branche total noté  $a_s$  comme suit :

$$a_s = \frac{\sum_{i=1}^M k_i}{\sum_{i=1}^N k_i} \text{ et } a_s = \frac{M}{N} \text{ si } k_i = k_p \text{ constant } , \forall i \in [1..N]. \quad (\text{V.42})$$

Ensuite, ils postulent une évolution linéaire de ce taux en fonction de la contrainte tel que  $a_s = \mu_s |\sigma|$ . Le passage d'un modèle discret à un modèle continu s'effectue alors en ajoutant une nouvelle raideur  $K_p$  fonction de la raideur global  $K$  telle que  $K_p = (1 - a_s)K$  (*cf.* FIG. V.4). La loi de comportement s'écrit alors telle que :

$$\sigma = \frac{1}{\mu_s} (1 - e^{-\mu_s K \varepsilon}). \quad (\text{V.43})$$

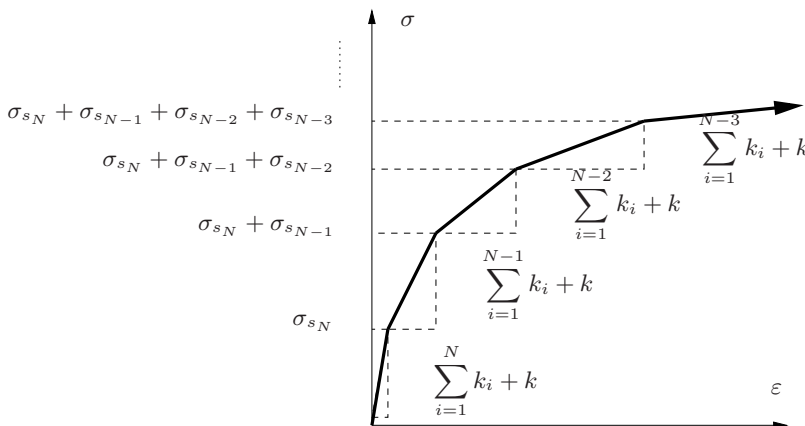


FIGURE V.3 – Réponse académique du modèle de SAINT-VENANT généralisé à un essai de montée en charge dans le cas monodimensionnel

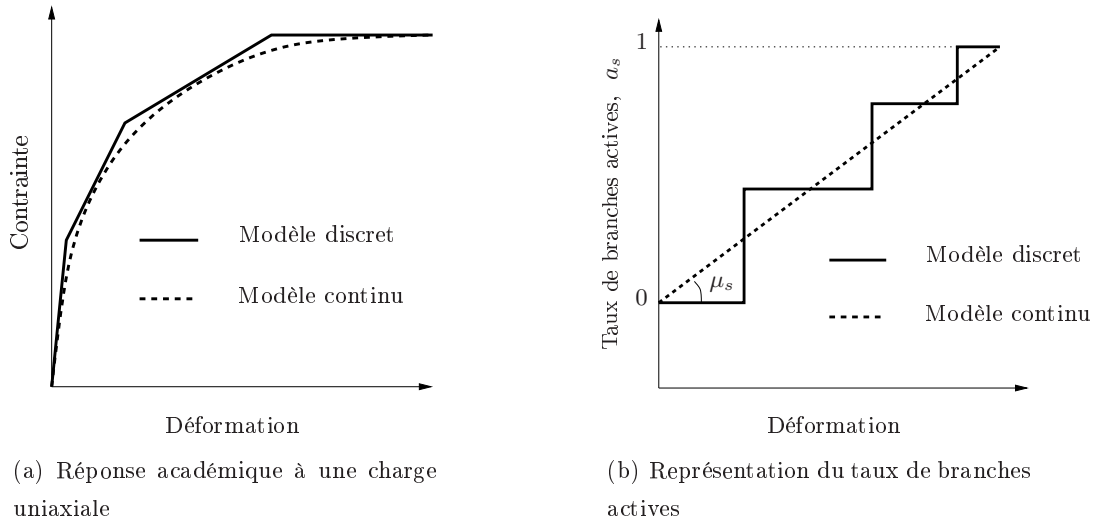


FIGURE V.4 – *Passage du modèle discret au modèle continu de RAMRAKHYANI et SMITH [2004] dans le cas monodimensionnel en petites déformations pour  $N = 3$ .*

Ce modèle offre de bons résultats malgré que son application numérique reste complexe à réaliser et que son utilisation se restreint au cadre des petites déformations pour des cas monodimensionnels.

- **Généralisation aux grandes déformations** : CANTOURNET [2002] propose l'utilisation de raideurs non-linéaires dans le cas monodimensionnel qui d'un point de vue rhéologique se traduit par le modèle de SAINT-VENANT généralisé (*cf.* FIG. V.2(d)) où les branches représentent un ensemble de chaînes de même longueur subissant toutes la même déformation macroscopique. Dans ces conditions, les branches élastiques parfaitement plastiques subissent une concentration de contraintes fonction de la longueur du groupe de chaînes associé avec un seuil d'extensibilité à partir duquel les chaînes glissent avec frottement sur la surface des charges.

La généralisation aux grandes déformations s'effectue alors en utilisant un modèle ② et en supposant que le seuil de plasticité est une fonction non-linéaire d'une variable interne de glissement  $\alpha$ . L'auteur propose alors l'interprétation des éléments rhéologiques suivante :

- la branche élastique pure représente les chaînes les plus longues sans concentration de contrainte,
- la branche élastique parfaitement plastique caractérise quant à elle les chaînes les plus courtes avec concentration de contrainte.

Il faut noter alors les difficultés que l'auteur rencontre pour le passage au cas tridimensionnel et l'incapacité du modèle à rendre compte des petites déformations rémanentes après avoir atteint de grandes déformations.

KALISKE et ROTHERT [1999] utilisent un formalisme mixte pour décrire le modèle de

SAINT-VENANT généralisé. Ils introduisent alors la notion d'états intermédiaires pour supposer l'existence de plusieurs variables internes plastiques et utilisent une fonction seuil de type VON MISES telle que pour chaque branche on ait :

$$f_i(\bar{\pi}_i) = \|\bar{\pi}_i\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}_{y_j} \quad (\text{V.44})$$

### V.2.2.c Modèles de friction

Nous distinguons les modèles de friction de ceux rhéologiques élastoplastiques en considérant le phénomène physique associé plutôt que le comportement d'un matériau. Dans ces conditions les variables utilisées sont l'effort tangentiel  $F_t$  et le déplacement  $u$ . On discutera donc, ici, autour de modèles de frottement considérés comme une amélioration du modèle de COULOMB.

La loi de COULOMB (*cf.* FIG. V.5(a)) fait intervenir  $\mu_c$  appelé coefficient de COULOMB (ou de frottement). Pendant une phase d'adhérence, le point de contact ne bouge pas (vitesse nulle). Pendant la phase de glissement, le point a une vitesse non nulle, il est soumis à une réaction tangente égale à  $\mu_c$  fois la réaction normale. Ce coefficient dépend donc des surfaces en contact. Cependant, en ce qui nous concerne, une amélioration de ce modèle serait d'observer cette loi avec une pénalisation (*cf.* FIG. V.5(b)). Dans ce cas, il n'y a plus de phase d'adhérence, la pente infinie est remplacée par une pente finie de valeur de coefficient de pénalisation tangent  $k_T$ . A la vue de cette représentation graphique du phénomène physique de frottement, on comprend mieux les relations qui peuvent exister avec un comportement élastique parfaitement plastique (*cf.* § V.2.2.b).

Généralement, la plupart de ces modèles caractérise correctement l'assouplissement suivant l'amplitude de chargement. Cependant, il s'agit de modèles macroscopiques monodimensionnels qui

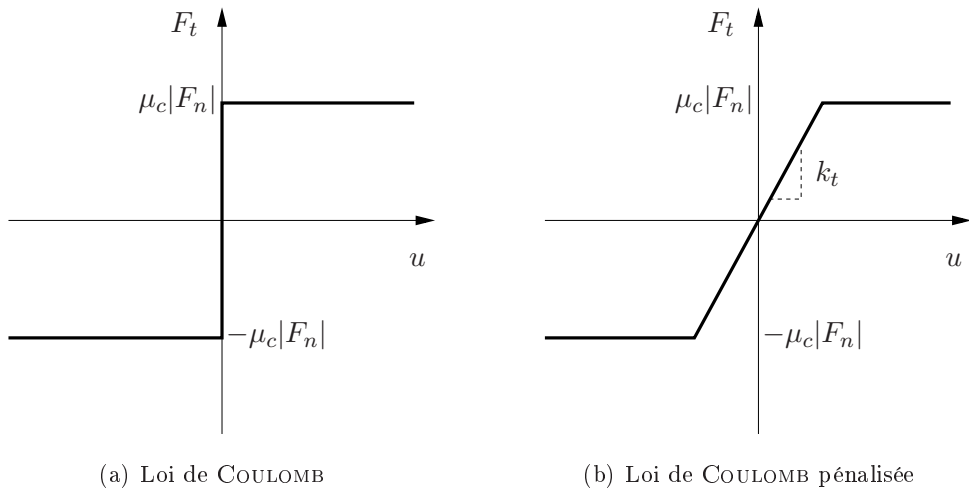


FIGURE V.5 – Représentation de la réaction tangentielle en fonction du déplacement des lois de COULOMB classique et pénalisée

dépendent de la géométrie d'une pièce et du type de chargement (compression, cisaillement). Concernant les élastomères chargés, la littérature [SJÖBERG, 2002 ; SAAD, 2003] nous propose comme exemple les modèles suivants :

- **Modèle de SJÖBERG** : ce modèle propose la forme suivante de l'effort frictionnel :

$$\begin{cases} F_f = F_{f_s} + \frac{u - u_s}{u_2(1 - \mu_c) + (u - u_s)}(F_{f_{max}} - F_s), \text{ pour } u \text{ croissant,} \\ F_f = F_{f_s} + \frac{u - u_s}{u_2(1 - \mu_c) - (u - u_s)}(F_{f_{max}} + F_s), \text{ pour } u \text{ décroissant,} \end{cases} \quad (\text{V.45})$$

où  $F_{f_{max}}$  et  $u_2$  sont les paramètres à identifier respectivement le maximum de l'effort de friction et le déplacement nécessaire pour obtenir la moitié de  $F_{f_{max}}$ . Le paramètre  $\mu_c = \frac{F_{f_s}}{F_{f_{max}}}$  caractérise le coefficient de frottement.  $F_{f_s}$  et  $\varepsilon_s$  sont initialisés aux valeurs d'effort et de déformation au début de chaque cycle et réactualisés au fur et à mesure. On utilise ce modèle en associant la force de friction à un effort élastique pur tel que  $F = F_e + F_f$  avec  $F_e = k_e u$  *i.e.* analogue à un modèle unitaire élastoplastique écrouissable.

- **Modèle de LAMBERTZ** : l'effort frictionnel est alors caractérisé par la relation suivante :

$$F_f = R \ln(1 \pm \rho \Delta u) \quad (\text{V.46})$$

où  $\pm \Delta u$  correspond au déplacement relatif (déplacement crête à crête du signal) à l'état de charge (charge ou décharge).

### V.2.3 L'endommagement des élastomères chargés

L'état de l'art du comportement endommageable des élastomères présenté ici s'est inspiré d'un travail réalisé en collaboration avec COURTOIS [2003]. Il s'agit donc de présenter préalablement, les causes de l'endommagement et les aspects qui le caractérise. Ensuite, nous proposerons quelques modèles de représentation de ce type de phénomène.

#### V.2.3.a Caractérisation de l'endommagement

La littérature permet de lier l'endommagement des élastomères à plusieurs phénomènes :

- la rupture des liaisons charges-chaînes, et des chaînes elles-mêmes (*cf.* FIG. V.6) [SIMO, 1987 ; GOVINDJEE et SIMO, 1991, 1992 ; MIEHE, 1995],
- la décohésion des charges, c'est à dire la diminution des caractéristiques mécaniques de leurs interfaces (*cf.* FIG. V.7) [ANDRIEUX *et al.*, 1997 ; DORFMANN et OGDEN, 2001 ; AUBARD *et al.*, 2002 ; BIKARD, 2002],
- la rupture des agglomérats [ROBISSON, 2000],
- et bien sur la propagation des fissures engendrées par ces trois phénomènes.

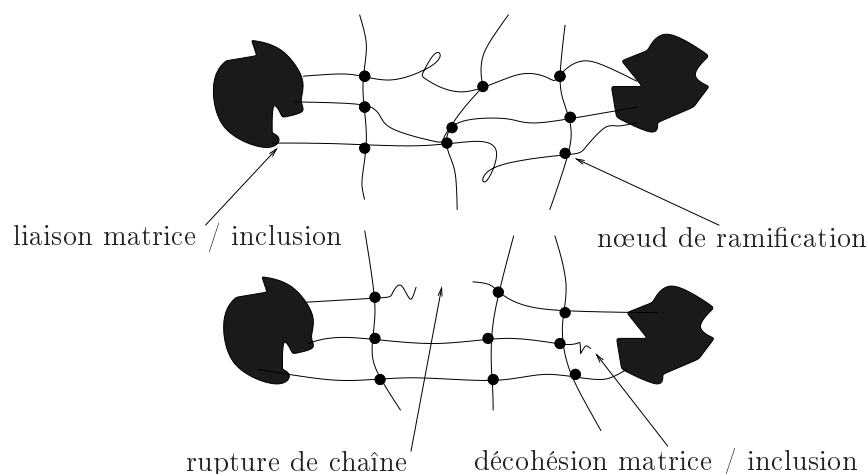


FIGURE V.6 – Deux types de mécanismes d'endommagement au sein d'un V.E.R. extraits de [GOVINDJEE et SIMO, 1991]

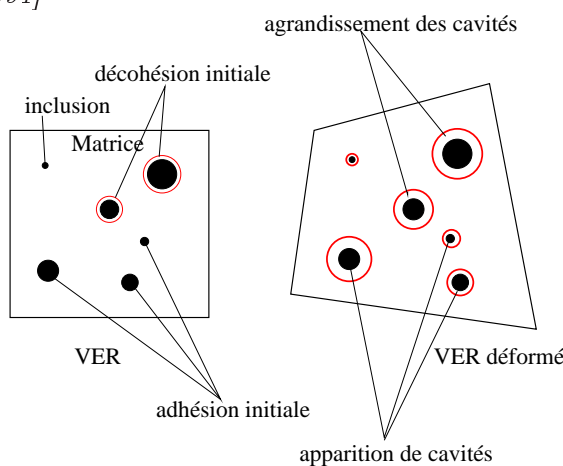


FIGURE V.7 – Apparition et évolution de cavités en fonction de la déformation du V.E.R. issue de [BIKARD, 2002]

La plupart des auteurs s'entendent pour considérer l'effet MULLINS comme un phénomène d'endommagement. Cependant, on peut aussi observer l'endommagement des élastomères chargés d'autres manières :

- **l'observation de cavitation** : ANDRIEUX *et al.* [1997] ont montré l'apparition de cavitation dans les élastomères chargés. Ce phénomène se traduit par une décohésion des charges et de la matrice élastomère elle-même (*cf.* FIG. V.7). Dans [ROBISSON, 2000], on peut lire que SAINTIER(1999) a montré que la décohésion des charges est la cause de la fatigue,

- **l'apparition et la propagation de fissures** : ROBISSON [2000] nous propose alors les constats suivants
  - l'amorçage des fissures dans l'élastomère dépend de la déformation maximale et de l'amplitude de déformation,
  - il y a diminution des caractéristiques mécaniques lors d'essais de fatigue sous sollicitations cycliques à amplitude constante. Il y a alors apparition de fissures perpendiculaires à la direction de sollicitation que l'auteur explique par la rupture d'agglomérats de charges de silice,
- **l'anisotropie induite** le mélange de la matrice et des éléments d'addition le constituant (charges. . .) conduit à un matériau relativement homogène et isotrope. Mais les caractéristiques du matériau sont modifiées par l'endommagement. En effet, par exemple, lors d'un essai de traction, les auteurs ROBISSON [2000] ; AUBARD *et al.* [2002] nous proposent un certains nombres de constations expérimentales telles que l'apparition de fissures perpendiculaires à la direction de sollicitation, des fissures se forment au sein même des aggrégats, il y a décohésion des charges à leur pôle. . . A la vue de ces remarques, on peut alors considérer que le matériau a une anisotropie induite par l'endommagement.

### V.2.3.b Exemples de lois d'endommagement

Nous présentons ici quelques exemples de modèles d'endommagement que l'on distingue suivant les deux approches de modélisation proposées dans la littérature. Les modèles s'appuient alors comme pour la modélisation des matériaux hyperélastiques (*cf.* § IV.5) soit sur des considérations micro-physiques soit sur des données phénoménologiques.

#### • Approches micro-physiques

- **Modèle de GOVINDJEE et SIMO(1991,1992)** : Le modèle de GOVINDJEE et SIMO [1991] a pour objet la modélisation de l'effet MULLINS en se reposant sur le mécanisme proposé par BUECHE en 1961. Les auteurs attribuent alors ce phénomène d'adoucissement à une rupture des chaînes au delà d'une longueur maximale (*cf.* FIG. V.6).

Dans une approche purement micro-mécanique, l'élastomère est vu comme un composite constitué d'une matrice élastomérique dans laquelle sont dispersées de fines particules de carbone. Il s'agit donc ici d'étudier un V.E.R. où les inclusions sont supposées rigides. L'énergie libre de la matrice  $\psi_m$  est composée alors de l'énergie libre des chaînes entre points de réticulation  $\psi_{pp}$  et de l'énergie libre des chaînes entre les charges  $\psi_{cc}$  de telle sorte que si on considère  $\mu_p$  la fraction volumique de charge, on a :

$$\psi_m(\lambda_i) = (1 - \mu_p)(\psi_{cc}(\lambda_i^m) + \psi_{pp}(\lambda_i^m)), \quad (\text{V.47})$$

avec  $\lambda_i$  les élongations macroscopiques et  $\lambda_i^m$  leurs analogues dans la matrice élastomère respectivement les valeurs propres de  $\bar{\bar{F}}$  pour  $i \in \{1,2,3\}$  et les valeurs propres du tenseur gradient de la transformation de la matrice  $\bar{\bar{F}}^m = \bar{\bar{R}} \cdot \frac{\bar{\bar{U}} - \nu_p \bar{\bar{I}}}{1 - \nu_p}$  pour  $i \in \{1,2,3\}$  en utilisant la décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}$  telle que  $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}}$ .

Les auteurs proposent alors pour  $\psi_{cc}(\lambda_i^m)$  la forme d'un modèle de matériaux hyperélastiques de type OGDEN et pour  $\psi_{pp}(\lambda_i^m)$  une forme telle que :

$$\psi_{pp}(\lambda_a^m) = \frac{N_{pp}}{3} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{A}_X} P(n,R) \Psi(n, \lambda_a^m R) dR dn, \quad (\text{V.48})$$

où  $N_{pp}$  est le nombre de ces chaînes par unité de volume,  $P(n,R)$  la probabilité d'en trouver une dans le V.E.R. localisé en  $X$ , de longueur  $R$  et constituée de  $n$  monomères de longueur moyenne  $a$ .  $\Psi(n, \lambda_a^m R)$  est la densité d'énergie d'une telle chaîne à une élongation macroscopique  $\lambda_a^m$ .  $\mathcal{A}_X$  est l'ensemble des couples de caractéristiques  $(n,R)$  physiquement admissibles dans le V.E.R. localisé en  $X$ .

L'introduction de l'endommagement peut ainsi se faire par une modification du domaine  $\mathcal{A}_X$ . Les auteurs supposent alors qu'un tel endommagement survient selon la direction de la plus grande élongation principale vue par le matériau durant son histoire de déformation et propose d'utiliser un critère scalaire d'endommagement.

### • Approches phénoménologiques

- **Modèle de SIMO (1987)** : SIMO [1987] associe à un modèle viscoélastique standard (cf. Eq. V.11), une variable d'endommagement  $\Theta^m$ . Se plaçant dans une configuration lagrangienne, l'énergie libre se décline en :

$$\psi(\bar{\bar{E}}, \bar{\bar{\mathcal{A}}}_v, \Theta^m) = g(\Theta^m) \psi_0(\bar{\bar{E}}) - \bar{\bar{\mathcal{A}}}_v : \bar{\bar{E}} + \psi_v(\bar{\bar{\mathcal{A}}}_v) \quad (\text{V.49})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Theta_t^m = \max_{t' \in ]-\infty, t]} \sqrt{2\psi_0(\bar{\bar{E}}(t'))}, \\ g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\alpha}, \quad \alpha > 0 \text{ et } \beta < 1 \text{ deux coefficients réels liés au matériau.} \end{cases} \quad (\text{V.50})$$

Ceci mène alors, en introduisant  $\mu(t)$  la fonction de relaxation du matériau, à l'expression du second tenseur de PIOLA-KIRCHOFF :

$$\bar{\bar{S}} = \int_0^\infty \mu(t - t') \frac{d}{dt'} \left( g(\Theta^m) \frac{\partial \psi_0(\bar{\bar{E}}(t'))}{\partial \bar{\bar{E}}(t')} \right) dt'. \quad (\text{V.51})$$

- **Modèle de MIEHE (1995)** : pour MIEHE [1995], relier l'endommagement à l'allongement maximal ou à un maximum d'énergie libre sont des concepts simplifiés car ils ne tiennent pas compte d'un éventuel cumul d'endommagement. Ce phénomène peut être constaté



expérimentalement sur un essai cyclé, pour lequel le matériau subit un assouplissement permanent et ce, pour des élongations n'excédant pas l'élongation maximale vue par l'élastomère au cours de son histoire des déformations.

Se basant sur les travaux de LEMAITRE et CHABOCHE ayant trait à l'endommagement dans le cas général, l'auteur propose d'enrichir le modèle de SIMO [1987], donnant lieu à un endommagement discontinu et un apport continu traduisant l'accumulation de ce dernier. La mise en place de cette formulation passe par la considération d'une variable interne d'endommagement de type scalaire  $d$  telle que :

$$\psi = (1 - d)\psi_0, \quad (\text{V.52})$$

où  $\psi_0$  représente l'énergie libre spécifique du matériau vierge de tout endommagement et  $d \in [0,1]$ . Si l'on se limite au seul phénomène d'endommagement d'un matériau isotrope au cours d'une transformation isotherme, nous obtenons pour une description eulérienne :

$$\phi = \left( \bar{\sigma} - 2\rho \bar{B} \cdot (1 - d) \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{B}} \right) : \bar{D} + \psi_0 \dot{d} \geq 0. \quad (\text{V.53})$$

Si l'on suppose que seul le phénomène d'endommagement est dissipatif, on arrive à :

$$\bar{\sigma} = 2\rho(1 - d)\bar{B} \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{B}} = (1 - d)\bar{\sigma}_0 \text{ et } \phi = \psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (\text{V.54})$$

La loi de comportement V.54 est complétée par deux lois d'évolution indépendantes gouvernant respectivement l'endommagement continu et l'endommagement discontinu :

$$d = d_\alpha(\alpha) + d_\beta(\beta). \quad (\text{V.55})$$

Les fonctions  $d_\alpha$  et  $d_\beta$  vérifient les conditions qui traduisent un état initial non endommagé ( $d_\alpha(0) = d_\beta(0) = 0$ ), une évolution croissante et irréversible de l'endommagement ( $\dot{d}_\alpha \geq 0$  et  $\dot{d}_\beta \geq 0$ ) et sa limite  $d_\alpha(\infty) + d_\beta(\infty) \in [0,1]$ . Les variables  $\alpha$  et  $\beta$  gouvernent respectivement l'endommagement discontinu de type MULLINS et celui d'accumulation continu. On peut alors écrire :

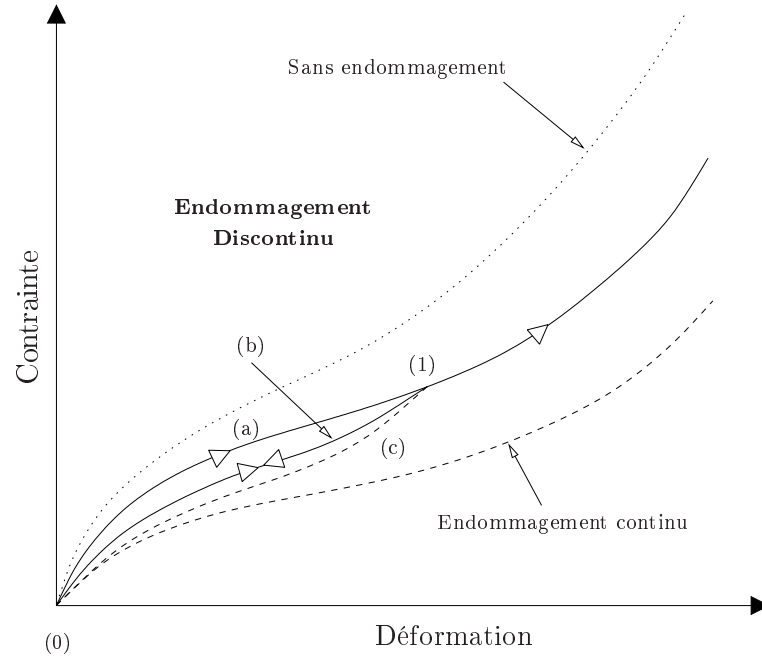
$$\alpha(t) = \max_{s \in [0,t]} \psi_0(s) \text{ et } \beta(t) = \int_0^t |\dot{\psi}_0(s)| ds. \quad (\text{V.56})$$

Ces variables suivent les lois d'évolution :

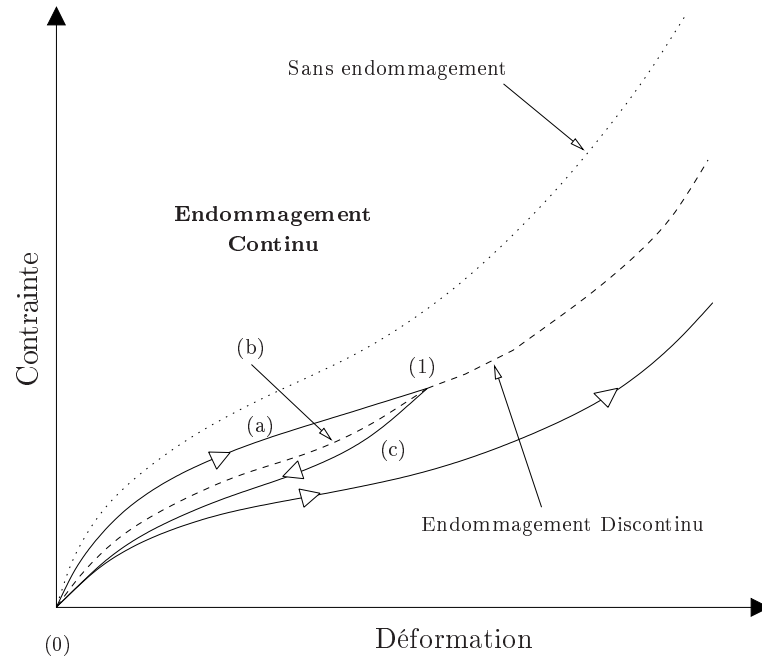
$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \dot{\psi}_0 & \text{si } \psi - \alpha = 0 \text{ et } \dot{\psi}_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \dot{\beta} = |\dot{\psi}_0|. \quad (\text{V.57a})$$

L'auteur propose alors deux expressions des fonctions  $d_\alpha$  et  $d_\beta$  telles que :

$$d_\alpha(\alpha) = d_\alpha^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_\alpha}\right) \right] \text{ et } d_\beta(\beta) = d_\beta^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right], \quad (\text{V.58})$$



(a) Participation de l'endommagement discontinu



(b) Participation de l'endommagement continu

FIGURE V.8 – Représentation graphique en contrainte-déformation du modèle de MIEHE [1995]

avec  $d_\alpha^\infty, d_\beta^\infty, \eta_\alpha$  et  $\eta_\beta$  quatre paramètres dépendant du matériau. Les FIGURES V.8(a) et V.8(b) nous montrent l'importance relative de chaque paramètre d'endommagement.

On peut alors remarquer que la partie discontinue de ce modèle est très proche de celle du modèle de SIMO [1987] (*cf.* FIG. V.8(a)). En effet, seule la formulation varie, la description

est – eulérienne pour SIMO, lagrangienne pour MIEHE –. On retrouve donc le caractère d'endommagement par effet MULLINS, c'est à dire un chargement par la branche (a) jusqu'au point (1), une décharge et une seconde charge par la même branche (b), et continuation de la charge par la branche (a). On a bien un endommagement discontinu qui ne dépend que du maximum de déformation durant l'histoire du matériau. Contrairement à l'endommagement continu (*cf.* FIG. V.8(b)) qui quant à lui dépend de toute l'histoire du matériau. Le chargement se traduit par la branche (a) jusqu'au point (1), puis une décharge par la branche (b) et une deuxième charge par la branche (c). L'endommagement a augmenté sans que l'on dépasse la déformation maximale subie par le matériau.

- **Modèle proposé par BIKARD et DÉSOYER (2001)** : BIKARD et DÉSOYER [2001] proposent une alternative aux deux modèles précédents en développant un modèle phénoménologique "microphysiquement motivé" à variables internes basé sur une thermodynamique des processus irréversibles, couplant faiblement endommagement et déformations élastoplastiques *i.e.* seulement par le biais des lois d'évolutions (dans ce cas, l'endommagement n'est pas fortement couplé aux mécanismes dissipatifs), et tenant compte du caractère visqueux de ces matériaux.

Par analogie aux hypothèses de ROUSSELIER concernant les aciers chargés de carbure, ils supposent que l'endommagement est majoritairement dû à des processus de décohésion de la matrice autour d'inclusions, *i.e.* l'apparition de micro-cavités. Les mécanismes élastoplastiques peuvent alors être scindés en une partie déviatorique (plasticité incompressible avec écrouissage isotrope caractérisant les réarrangements permanents de chaînes macromoléculaires), et une partie sphérique caractérisant l'apparition de cavités permanentes autour des inclusions, du fait d'une répartition radiale des contraintes autour d'elles (*cf.* FIG. V.7). Ces cavités déterminent la porosité du V.E.R., et modifient donc sa masse volumique initiale. Ce constat amène les auteurs à supposer que le V.E.R. n'est pas incompressible, à la différence de la matrice élastomérique, ce qui rejoint le concept de matériau incompressible à compressibilité induite par l'endommagement présenté par ANDRIEUX *et al.* [1997].

#### V.2.4 Bilan

De manière générale, l'approche du comportement viscoélastique par intégrales héréditaires donne lieu à des modèles qui corréleront finement l'expérience. Cependant, la mise en oeuvre numérique de tels modèles se trouve souvent difficile à réaliser de par :

- l'identification des différentes fonctionnelles difficilement généralisables à d'autres matériaux,
- le stockage numérique de toute l'histoire des variables dépassant nettement la mémoire des calculateurs les plus performants.

---

L'utilisation des formulations différentielles semble conduire à des modèles beaucoup plus maniables. Donc, nous adopterons dans la suite de cette étude ce type d'approche du comportement viscoélastique et élastoplastique dans la perspective de représenter respectivement l'influence du temps de sollicitation et de l'amplitude de chargement comme nous avons pu le constater expérimentalement.

Nous avons pu voir que le phénomène d'endommagement des élastomères est complexe et s'observe de nombreuses manières. L'effet MULLINS, l'apparition de fissures, la cavitation, sont des phénomènes difficiles à étudier qui de plus ont des actions couplées sur le matériau. On a pu constater que de nombreux auteurs se sont penchés sur ce sujet. Cependant, il ne sera pas pris en compte dans la suite de l'étude.

## V.3 Présentation des modèles viscoélastiques et élastoplastiques

### V.3.1 Synthèse du formalisme mécanique adopté

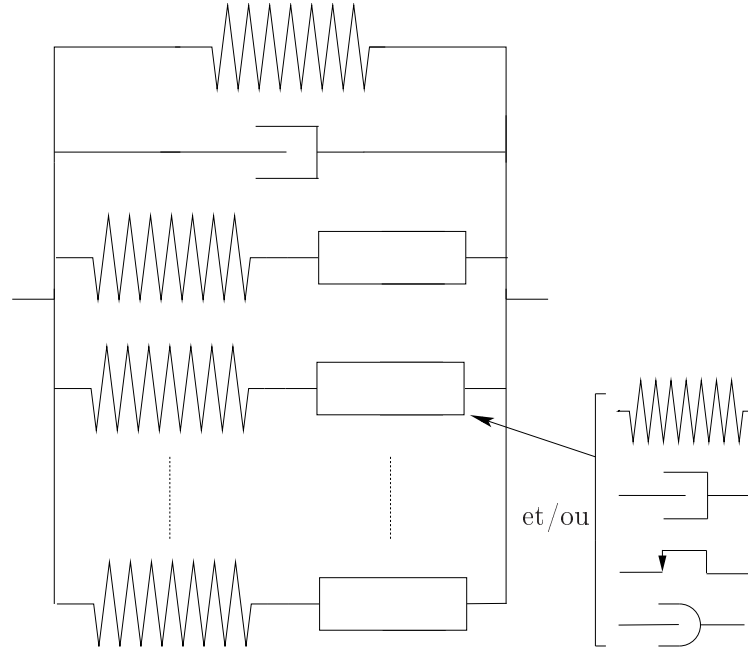
Nous avons choisi d'utiliser une approche phénoménologique différentielle des comportements, si bien que le cadre thermodynamique sera celui introduit en ANNEXE A. MÉO [2000] rappelle que l'adoption d'une telle démarche nécessite de réaliser un certain nombre d'hypothèses que l'on peut énoncer comme suit :

- une formulation en grandes déformations basée sur l'état local qui nous permet d'introduire les notations du TABLEAU IV.1 présenté au CHAPITRE IV.
- une indépendance des phénomènes thermiques et mécaniques qui nous permet de considérer la dissipation comme résultant uniquement de la déformation globale et des variables internes ( $\varphi = \varphi^{int} + \varphi^{ther}$ )<sup>(5)</sup> [GERMAIN, 1973 ; SIDOROFF, 1975a,b],
- l'introduction d'une ou plusieurs variables internes via le concept d'états intermédiaires anélastiques en définissant les gradients de la  $i$ -ème transformation :  $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot {}^i\bar{\bar{F}}_a$ . On peut alors introduire les tenseurs suivants :
  - $\bar{\bar{B}}_e^i$  et  ${}^i\bar{\bar{B}}_a$  respectivement le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche associé à  $\bar{\bar{F}}_e^i$  et à  ${}^i\bar{\bar{F}}_a$ ,
  - la décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}_e^i$  telle que  $\bar{\bar{F}}_e^i = \bar{\bar{V}}_e^i \cdot \bar{\bar{R}}_e^i = \bar{\bar{R}}_e^i \cdot \bar{\bar{U}}_e^i$  où  $\bar{\bar{V}}_e^i$  et  $\bar{\bar{R}}_e^i$  désignent respectivement les tenseurs de déformation pure et de rotation,
  - ${}^i\bar{\bar{D}}_a$ , le  $i$ -ème tenseur taux de déformation anélastique tel que  ${}^i\bar{\bar{D}}_a = ({}^i\dot{\bar{\bar{F}}}_a \cdot {}^i\bar{\bar{F}}_a^{-1})_{sym}$  où  ${}^i\bar{\bar{D}}_a^o = \bar{\bar{R}}_e^i \cdot {}^i\bar{\bar{D}}_a \cdot \bar{\bar{R}}_e^{iT}$  représente sa mesure eulérienne (variable objective),
- le cadre des matériaux standards généralisés postulant l'existence de pseudo-potentiels de dissipation anélastique ( $\varphi_{a_i}$ ),
- le matériau est homogène et isotrope,
- un découplage de l'énergie libre en une somme de fonctions isotropes des variables d'états,
- l'incompressibilité globale et anélastique du matériau ( $\text{tr} \bar{\bar{D}} = \text{tr} {}^i\bar{\bar{D}}_a^o = 0$ ).

Une formulation eulérienne de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM, nous propose alors les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} + \bar{\bar{B}}_e^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}_e^i} \right]^D + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}} - p \bar{\bar{1}}, \\ 2\rho \left[ \bar{\bar{V}}_e^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}_e^i} \cdot \bar{\bar{V}}_e^i \right]^D = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i\bar{\bar{D}}_a^o}, \\ -\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{q}} \text{ et } \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \psi_e^i(\bar{\bar{B}}_e^i) + \psi_a^i({}^i\bar{\bar{B}}_a), \\ \varphi^{int} = \varphi_0^{int}(\bar{\bar{D}}) + \varphi_{a_i}^{int}({}^i\bar{\bar{D}}_a^o), \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\vec{q}), \end{array} \right. \quad (\text{V.59})$$

(5). L'hypothèse d'indépendance des phénomènes thermiques et mécaniques restreint le domaine de validité de nos modèles sachant que pour des essais cycliques on observe une variation de température au cœur des élastomères.

FIGURE V.9 – *Modèle rhéologique étendu généralisé aux grandes déformations*

avec  $\rho$ ,  $T$ ,  $\eta$ ,  $\vec{q}$  et  $p$  respectivement la masse volumique eulérienne, la température absolue, l'entropie spécifique, la densité surfacique de chaleur et un multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité.

Le système d'équations V.59 peut alors être vu comme la généralisation aux grandes déformations du modèle rhéologique présenté sur la FIGURE V.9. On peut ainsi à partir de ce modèle rhéologique étendu retrouver les divers modèles rhéologiques présentés en ANNEXE C.1.

### V.3.2 Modèles de comportement viscoélastique

Comme nous avons pu l'observer précédemment à travers la littérature (*cf.* § V.2.1), les modèles rhéologiques viscoélastiques présentés sous l'hypothèse des petites perturbations en ANNEXE C.1.3, constituent une bonne solution pour représenter une dépendance en temps des matériaux. Pour illustrer cela, on présente l'évolution des réponses de certains modèles rhéologiques classiques tels que KELVIN-VOIGT, MAXWELL, POYNTING-THOMSON et ZENER (*cf.* FIG. ??) en fonction de la fréquence.

On propose une représentation schématique de l'allure des courbes caractérisant le module dynamique et la dissipation globale pour une sollicitation sinusoïdale telle que  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$  en fonction de la pulsation notée  $\omega = 2\pi f_r$  (*cf.* FIG. V.11). Une représentation graphique de  $E^*$  et  $\Phi_{/cycle}$  pour un matériau à comportement viscoélastique lors un chargement cyclique est disponible à travers la FIGURE V.10. L'obtention de ces grandeurs caractéristiques d'une sollicitation

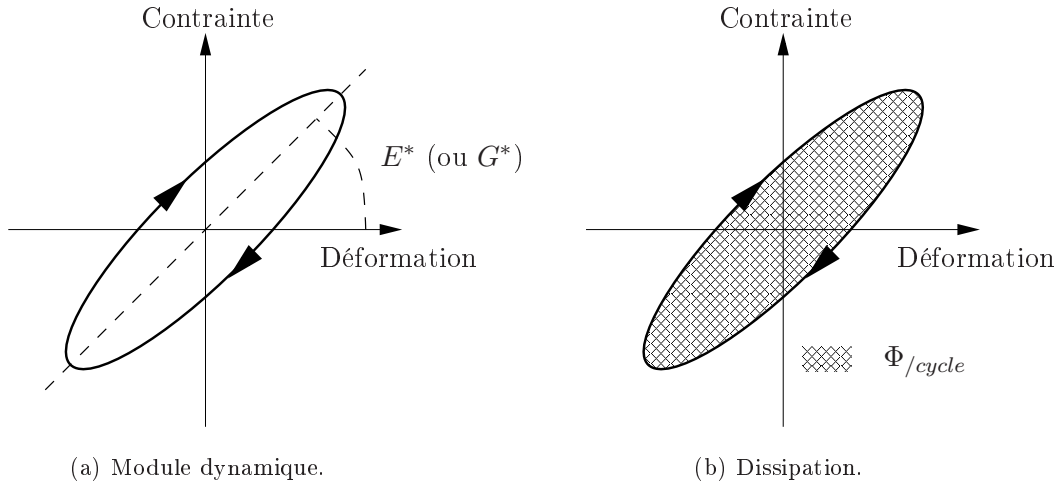


FIGURE V.10 – Représentation graphique des grandeurs caractéristiques d'une sollicitation harmonique pour un matériau viscoélastique.

harmonique s'effectue alors en utilisant la méthode d'analyse complexe décrite en ANNEXE C.2. En petites déformations, les expressions de  $E^*$  ( $G^*$  en cisaillement) et  $\Phi_{/cycle}$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour le modèle de KELVIN-VOIGT :} \\ E^* = \varepsilon_0 \sqrt{k^2 + \eta^2 \omega^2} \text{ et } \Phi_{/cycle} = \eta \varepsilon_0^2 \omega \pi, \\ \text{pour le modèle de MAXWELL :} \\ E^* = \frac{k \varepsilon_0 \eta \omega}{\sqrt{k^2 + \eta^2 \omega^2}} \text{ et } \Phi_{/cycle} = \eta \frac{k^2 \varepsilon_0^2 \omega \pi}{k^2 + \eta^2 \omega^2}, \\ \text{pour le modèle de POYNTING-THOMSON :} \\ E^* = \frac{k_e \varepsilon_0}{(k_e + k_v)^2 + \eta^2 \omega^2} \sqrt{[k_v (k_e + k_v) + \eta^2 \omega^2]^2 + [k_e \eta \omega]^2} \\ \text{et } \Phi_{/cycle} = \eta \frac{k_e^2 \varepsilon_0^2 \omega \pi}{(k_e + k_v)^2 + \eta^2 \omega^2}, \\ \text{et pour le modèle de ZENER :} \\ E^* = \frac{\varepsilon_0}{k_v^2 + \eta^2 \omega^2} \sqrt{[k_e k_v^2 + \eta^2 \omega^2 (k_e + k_v)]^2 + [k_v^2 \eta \omega]^2} \\ \text{et } \Phi_{/cycle} = \eta \frac{k_v^2 \varepsilon_0^2 \omega \pi}{k_v^2 + \eta^2 \omega^2}. \end{array} \right. \quad (V.60)$$

Les maxima des courbes représentatives de la dissipation globale sont alors atteints lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour le modèle de MAXWELL : } \omega = \pm \frac{k}{\eta}, \\ \text{pour le modèle de POYNTING-THOMSON : } \omega = \pm \frac{k_e + k_v}{\eta}, \\ \text{pour le modèle de ZENER : } \omega = \pm \frac{k_v}{\eta}. \end{array} \right. \quad (V.61)$$

**REMARQUE V.2**

On peut montrer facilement que le modèle de MAXWELL est un cas particulier des modèles de ZENER et de POYNTING-THOMSON en posant respectivement  $k_{eZ} = 0$  et  $k_{vPT} = 0$ . Il est intéressant de rappeler aussi qu'il y a équivalence de ces deux modèles, déjà vu en ANNEXE C.1.3.d en posant :

$$\begin{cases} \frac{1}{k_{eZ}} = \frac{1}{k_{ePT}} + \frac{1}{k_{vPT}}, \\ k_{vZ} = k_{ePT} + k_{vPT}. \end{cases} \quad (\text{V.62})$$

□

La FIGURE V.11 présente schématiquement l'évolution du module dynamique et la dissipation globale associés à chaque modèle suivant la pulsation de la sollicitation sinusoïdale. L'allure des courbes est sensiblement proche de celle obtenue par les résultats expérimentaux décrits au paragraphe III.6. Le TABLEAU V.3 présente les paramètres qui ont été choisis pour réaliser cette observation.

Via la formulation du modèle étendu en grandes déformations développé au paragraphe § V.3.1, nous pouvons construire les modèles hyper-viscoélastiques comportant des associations d'élé-

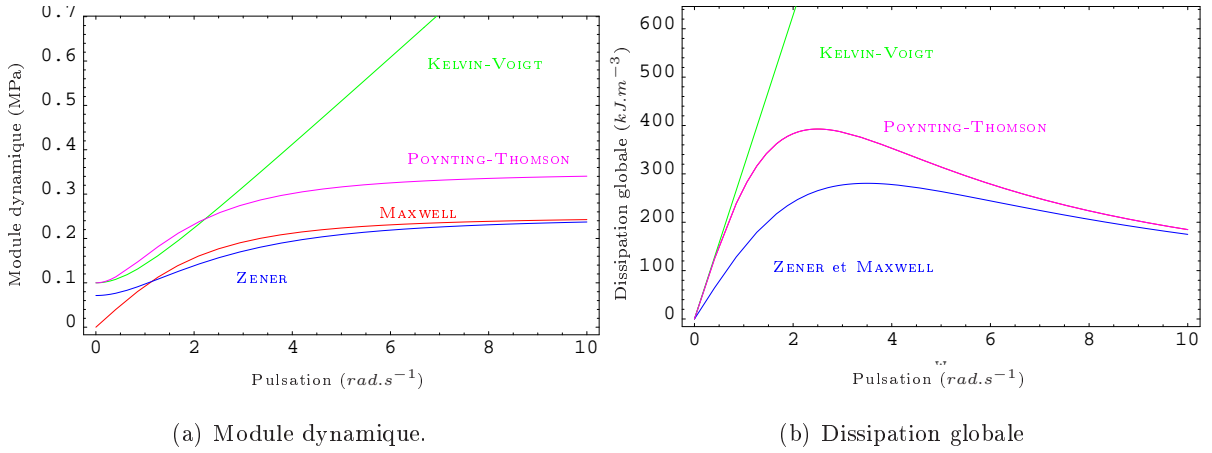


FIGURE V.11 – Représentation schématique de l'évolution suivant la pulsation du module dynamique et de la dissipation globale des modèles viscoélastiques classiques en petites déformations pour une sollicitation sinusoïdale.

Modèle	$k(\text{MPa})$	$k_e(\text{MPa})$	$k_v(\text{MPa})$	$\eta(\text{MPa.s})$
KELVIN-VOIGT	0.1	×	×	0.1
MAXWELL	0.25	×	×	0.1
POYNTING-THOMSON	×	0.25	0.1	0.1
ZENER	×	0.1	0.25	0.1

TABLEAU V.3 – Paramètres choisis pour la représentation schématique des modèles viscoélastiques classiques.



ments de type ressort et amortisseur nécessitant l'introduction d'une ou plusieurs variables internes par le biais d'états intermédiaires visqueux *i.e.*  $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot {}^i\bar{\bar{F}}_v$ . On fait le choix alors d'étudier les modèles classiquement utilisés tels que le modèle de KELVIN-VOIGT, MAXWELL, ZENER, POYNTING-THOMSON et MAXWELL généralisé (*cf.* FIG. V.1).

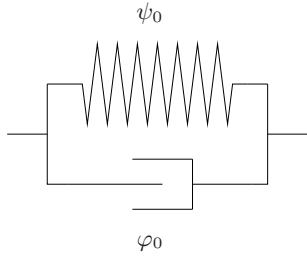
### REMARQUE V.3

En supposant l'incompressibilité du matériau (*cf.* § IV.4), nous présentons une formulation développée de l'énergie libre d'une transformation comme une fonction scalaire isotrope de ces deux premiers invariants telle que :

$$\begin{cases} \psi_0(\bar{\bar{B}}) = \psi_0(I_1, I_2), \\ \psi_e^i(\bar{\bar{B}}_e^i) = \psi_e^i(I_1^i, I_2^i), \\ \psi_v^i({}^i\bar{\bar{B}}_v) = \psi_v^i(I_1^i, I_2^i). \end{cases} \quad (\text{V.63})$$

□

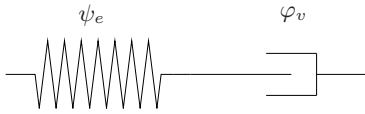
#### • Modèle de KELVIN-VOIGT



$$\text{avec} \quad \begin{cases} \psi_{tot} = \psi_0(\bar{\bar{B}}) \\ \varphi_{tot} = \varphi_0(\bar{\bar{D}}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \bar{\bar{D}}} - p \bar{\bar{1}}$$

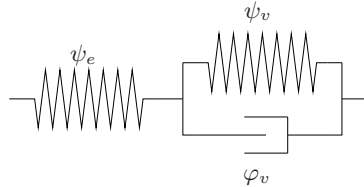
#### • Modèle de MAXWELL



$$\text{avec} \quad \begin{cases} \psi_{tot} = \psi_e(\bar{\bar{B}}_e) \\ \varphi_{tot} = \varphi_v(\bar{\bar{D}}_v^o) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D - p \bar{\bar{1}}, \\ 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D = \frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o}. \end{cases}$$

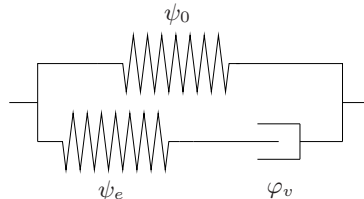
- Modèle de POYNTING-THOMSON



avec 
$$\begin{cases} \psi_{tot} = \psi_e(\bar{\bar{B}}_e) + \psi_v(\bar{\bar{B}}_v) \\ \varphi_{tot} = \varphi_v(\bar{\bar{D}}_v^o) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D - p\bar{\bar{1}}, \\ 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D + 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} \bar{\bar{B}}_v - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{B}}_v^{-1} \right]^D = \frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o}. \end{cases}$$

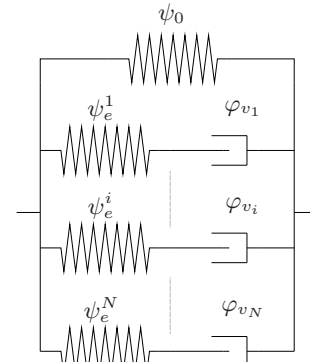
- Modèle de ZENER



avec 
$$\begin{cases} \psi_{tot} = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \psi_e(\bar{\bar{B}}_e) \\ \varphi_{tot} = \varphi_v(\bar{\bar{D}}_v^o) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D + 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D - p\bar{\bar{1}}, \\ 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D = \frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o}. \end{cases}$$

- Modèle de MAXWELL généralisé



avec 
$$\begin{cases} \psi_{tot} = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \sum_{i=1}^N \psi_e^i(\bar{\bar{B}}_e^i) \\ \varphi_{tot} = \varphi_{v_i}(\bar{\bar{D}}_v^o) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D + 2\rho \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_1^i} \bar{\bar{B}}_e^i - \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_2^i} \bar{\bar{B}}_e^{i-1} \right]^D - p\bar{\bar{1}}, \\ 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_1^i} \bar{\bar{B}}_e^i - \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_2^i} \bar{\bar{B}}_e^{i-1} \right]^D = \frac{\partial \varphi_{v_i}}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o}, \quad \forall i \in [1..N]. \end{cases}$$

Les équations qui régissent chacun des modèles étant ainsi présentées, il nous reste donc à déterminer les modèles d'énergie libre et de pseudo-potentiels de dissipation que l'on va utiliser :

- concernant le choix des modèles d'énergie libre de matériau hyperélastique (*cf.* § IV.5), nous avons opté pour le modèle neohookéen tel que

$$\begin{cases} \psi_0(I_1, I_2) = a_0(I_1 - 3), \\ \psi_e^i(I_1^i, I_2^i) = a_i(I_1^i - 3) \quad \forall i \in [1..N], \\ \psi_v^i(I_1^i, I_2^i) = b_i(I_1^i - 3) \quad \forall i \in [1..N], \end{cases} \quad (\text{V.64})$$

qui permet alors de nous assurer une vérification des conditions de stabilité matérielle des lois hyperélastiques en imposant la positivité des paramètres,  $a_0$ ,  $a_i$  et  $b_i$  comme nous avons pu l'observer au paragraphe IV.6.2,

- la forme des pseudo-potentiels de dissipation est celle postulée par BOUKAMEL *et al.* [2000], *i.e.* pseudo-potentiels quadratiques de la forme :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \frac{1}{2} \eta_0 \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}} = \frac{\eta_0}{2} \text{tr}(\bar{\bar{D}}^2) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \bar{\bar{D}}} = \eta_0 \bar{\bar{D}}, \\ \varphi_{v_i} = \frac{1}{2} \eta_i {}^i \bar{\bar{D}}_v^o : {}^i \bar{\bar{D}}_v^o = \frac{\eta_i}{2} \text{tr}({}^i \bar{\bar{D}}_v^{o2}) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \varphi_{v_i}}{\partial {}^i \bar{\bar{D}}_v^o} = \eta_i {}^i \bar{\bar{D}}_v^o. \end{cases} \quad (\text{V.65})$$

A ce stade, on peut exprimer le nombre de paramètres à identifier pour chaque modèle :

- 2 pour le modèle de KELVIN-VOIGT :  $a_0$  et  $\eta_0$ ,
- 2 pour le modèle de MAXWELL :  $a_0$  et  $\eta$ ,
- 3 pour les modèle de ZENER et POYNTING-THOMSON :  $a_0$ ,  $a_1$  (ou  $b_1$ ) et  $\eta$ ,
- $2N + 1$  pour le modèle de MAXWELL généralisé :  $a_0$ ,  $a_i$  et  $\eta_i$ .

### V.3.3 Modèles de comportement élastoplastique

Les modèles rhéologiques élastoplastiques écrouissables présentés sous l'hypothèse des petites perturbations en ANNEXE C.1.3, sont un choix judicieux pour caractériser l'évolution du comportement dissipatif suivant l'amplitude de déformation. En effet pour une sollicitation sinusoïdale *i.e.*  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , on peut réaliser une représentation schématique de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant l'amplitude dynamique  $\varepsilon_0$  (*cf.* FIG. V.13). Une représentation graphique de  $E^*$  et  $\Phi_{/cycle}$  pour un matériau à comportement élastoplastique écrouissable lors un chargement cyclique est disponible à travers la FIGURE V.12.

Concernant un modèle élastoplastique écrouissable de type ②, les grandeurs caractéristiques sont alors telles que :

$$E^* = \begin{cases} k_e + k_p \text{ si } \varepsilon_0 < \frac{\chi}{k_e + k_p}, \\ k_e + \frac{\chi}{\varepsilon_0} \frac{k_p}{k_e + k_p}, \end{cases} \quad \text{et } \Phi_{/cycle} = \begin{cases} 0 \text{ si } \varepsilon_0 < \varepsilon_\chi, \text{ si } \varepsilon_0 < \frac{\chi}{k_e + k_p}, \\ \frac{4\chi k_p}{k_e + k_p} \left( \varepsilon_0 - \frac{\chi}{k_e + k_p} \right) \text{ sinon,} \end{cases} \quad (\text{V.66})$$

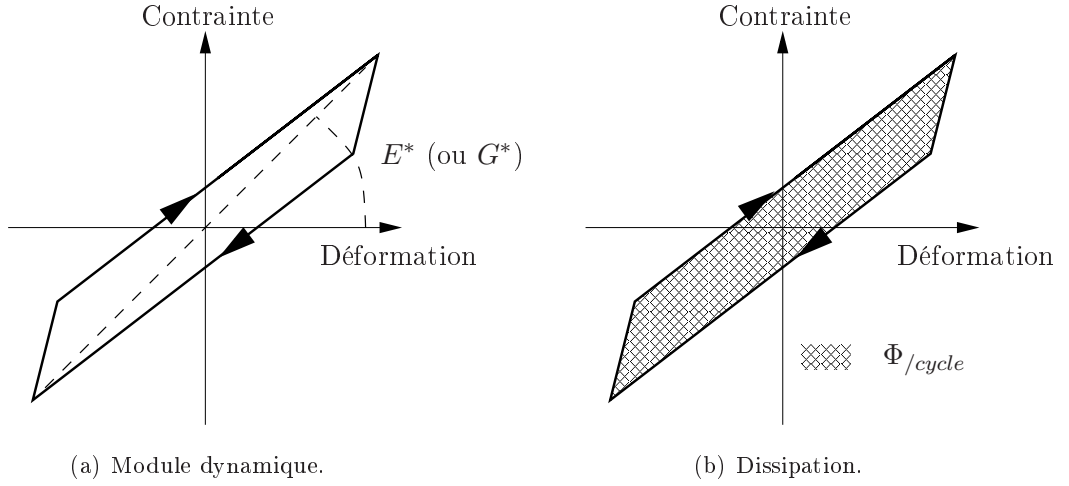


FIGURE V.12 – Représentation graphique des grandeurs caractéristiques d'une sollicitation harmonique pour un matériau élastoplastique écrouissable.

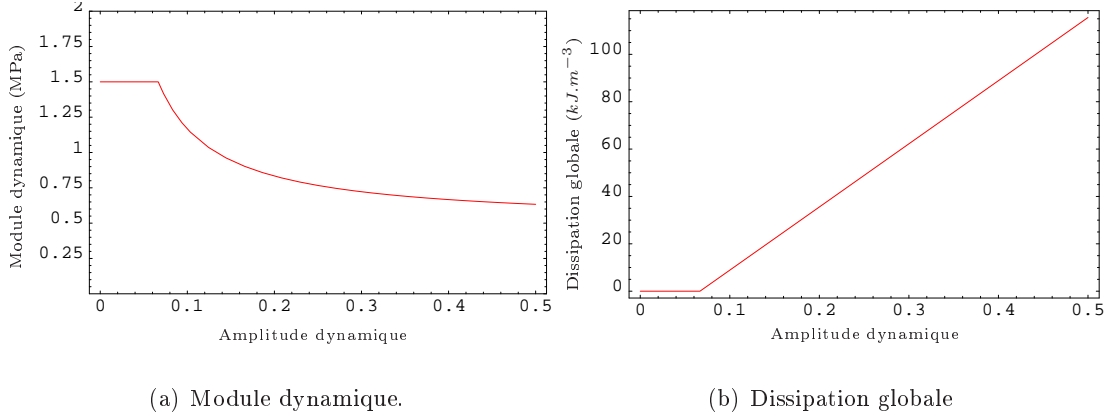
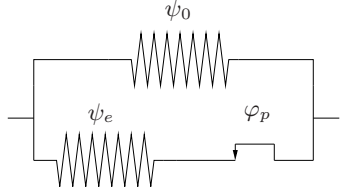


FIGURE V.13 – Représentation schématique de l'évolution suivant l'amplitude dynamique du module dynamique et de la dissipation globale du modèle élastoplastique écrouissable ② en petites déformations pour une sollicitation sinusoïdale.

L'examen de la FIGURE V.13, nous montre alors la capacité du modèle élastoplastique écrouissable ② à traduire le phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude dynamique que l'on a pu constater de manière expérimentale (cf. § III.6). Les paramètres qui ont été choisis pour réaliser cette observation sont les suivants :  $k_e = 0.5\text{MPa}$ ,  $k_p = 1.\text{MPa}$  et  $\chi = 0.1\text{MPa}$ .

Pour généraliser aux grandes déformations les modèles de comportement élastoplastique écrouissable comportant une association d'éléments de type ressort et patin, nous avons choisi comme précédemment de partir de la formulation du modèle étendu présenté au paragraphe V.3.1 mais d'introduire cette fois-ci une ou plusieurs variables internes par le biais d'états intermédiaires de type plastique ( $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot {}^i\bar{\bar{F}}_p$ ). Ainsi, on considère deux modèles élastoplastiques écrouissables gouvernés par les équations suivantes :

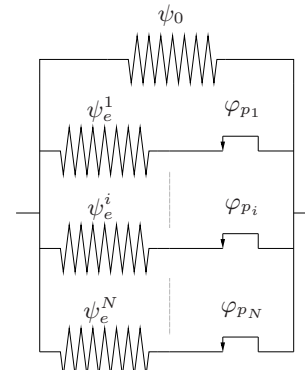
• Modèle élastoplastique écrouissable ②



$$\text{avec } \begin{cases} \psi_{tot} = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \psi_e(\bar{\bar{B}}_e) \\ \varphi_{tot} = \varphi_p(\bar{\bar{D}}_p^o) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D + 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D - p\bar{1}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_p = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} \bar{\bar{B}}_e - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{B}}_e^{-1} \right]^D \text{ et } \bar{\bar{D}}_p^o = \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial \bar{\bar{\sigma}}_p}. \end{cases}$$

• Modèle de SAINT-VENANT généralisé



$$\text{avec } \begin{cases} \psi_{tot} = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \sum_{i=1}^N \psi_e^i(\bar{\bar{B}}_e^i) \\ \varphi_{tot} = \varphi_{p_i}(\bar{\bar{D}}_p^o) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^{-1} \right]^D + 2\rho \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_1^i} \bar{\bar{B}}_e^i - \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_2^i} \bar{\bar{B}}_e^{i-1} \right]^D - p\bar{1}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{p_i} = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_1^i} \bar{\bar{B}}_e^i - \frac{\partial \psi_e^i}{\partial I_2^i} \bar{\bar{B}}_e^{i-1} \right]^D \text{ et } {}^i\bar{\bar{D}}_p^o = \frac{\partial \varphi_{p_i}^*}{\partial \bar{\bar{\sigma}}_{p_i}}, \quad \forall i \in [1..N]. \end{cases}$$

Concernant la modélisation du caractère hyperélastique, nous avons opté pour une représentation des énergies libres similaire à celle utilisée pour la représentation du comportement viscoélastique (cf. Eq. V.64).

La forme classique des pseudo-potentiels de dissipation plastique peut s'écrire comme suit :

$$\tilde{\varphi}_{p_i}({}^i\bar{\bar{D}}_p^o) = \sup_{\|\bar{\bar{\sigma}}_{p_i}\| \leq \chi} \left\{ \bar{\bar{\sigma}}_{p_i} : {}^i\bar{\bar{D}}_p^o \right\}. \quad (\text{V.67})$$

Or il est très difficile de la mettre en œuvre numériquement. Nous avons donc fait le choix d'utiliser une dissipation (visco-)plastique,  $\varphi_p(\bar{\bar{\sigma}}_p)$  où l'on fait tendre la viscosité vers 0 donnée

par sa transformée de LEGENDRE-FENCHEL avec une surface seuil de type VON-MISES de la forme :

$$\varphi_{p_i}^*(\bar{\sigma}_{p_i}) = \frac{1}{2\tilde{\eta}} \langle \|\bar{\sigma}_{p_i}\| - \chi \rangle^2 \quad \text{avec} \quad \lim_{\tilde{\eta} \rightarrow 0} \varphi_{p_i}({}^i\bar{\bar{D}}_p^0) = \tilde{\varphi}_{p_i}({}^i\bar{\bar{D}}_p^0) \quad (\text{V.68})$$

où  $\tilde{\eta}$  est une viscosité artificielle fixée très faible et permettant de régulariser l'algorithme de détermination de  ${}^i\bar{\bar{D}}_p^0$ . On exprime alors  ${}^i\bar{\bar{D}}_p^0$  en fonction de  $\bar{\sigma}_{p_i}$  avec  $\|\bar{\sigma}_{p_i}\| = \sqrt{\text{tr}(\bar{\sigma}_{p_i} : \bar{\sigma}_{p_i}^T)}$  tel que :

$${}^i\bar{\bar{D}}_p^0 = \frac{\partial \varphi_{p_i}^*}{\partial \bar{\sigma}_{p_i}} = \frac{\langle \|\bar{\sigma}_{p_i}\| - \chi \rangle}{\tilde{\eta}} \frac{\bar{\sigma}_{p_i}}{\|\bar{\sigma}_{p_i}\|}. \quad (\text{V.69})$$

On peut alors exprimer le nombre de paramètres à identifier par modèles :

- 3 pour le modèle élastoplastique écrouissable ② :  $a_0$ ,  $a_1$  et  $\chi$ ,
- $2N + 1$  pour le modèle de SAINT-VENANT généralisé :  $a_0$ ,  $a_i$  et  $\chi_i$ .

## V.4 Campagne d'identification des modèles

### V.4.1 Méthode d'identification

En vue d'identifier les paramètres des différents modèles, nous disposons d'une campagne expérimentale que nous avons réalisée sur le matériau de l'étude et dont les détails ont été vus au CHAPITRE III. Nous choisissons un essai cyclique de double cisaillement de type sinusoïdal avec une amplitude de déformation de 25% pour une fréquence de  $10Hz$  comme exemple d'essais de référence d'identification (*cf.* FIG. V.14).

L'identification étant réalisée sur un essai de double cisaillement (le cisaillement est considéré comme uniforme), on suppose alors que le gradient global  $\bar{\bar{F}}$  et le (ou les) pseudo-gradient(s) anélastique(s)  ${}^i\bar{\bar{F}}_a$  prennent les formes suivantes :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^i\bar{\bar{F}}_a = \begin{bmatrix} {}^i\gamma_{a11} & {}^i\gamma_a & 0 \\ 0 & {}^i\gamma_{a22} & 0 \\ 0 & 0 & {}^i\gamma_{a33} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.70})$$

L'hypothèse d'incompressibilité  $\det \bar{\bar{F}} = \det {}^i\bar{\bar{F}}_a = 1$ , nous permet alors de simplifier la forme de  ${}^i\bar{\bar{F}}_a$  telle que :

$${}^i\bar{\bar{F}}_a = \begin{bmatrix} {}^i\gamma_{a11} & {}^i\gamma_a & 0 \\ 0 & {}^i\gamma_{a22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{{}^i\gamma_{a11} {}^i\gamma_{a22}} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.71})$$

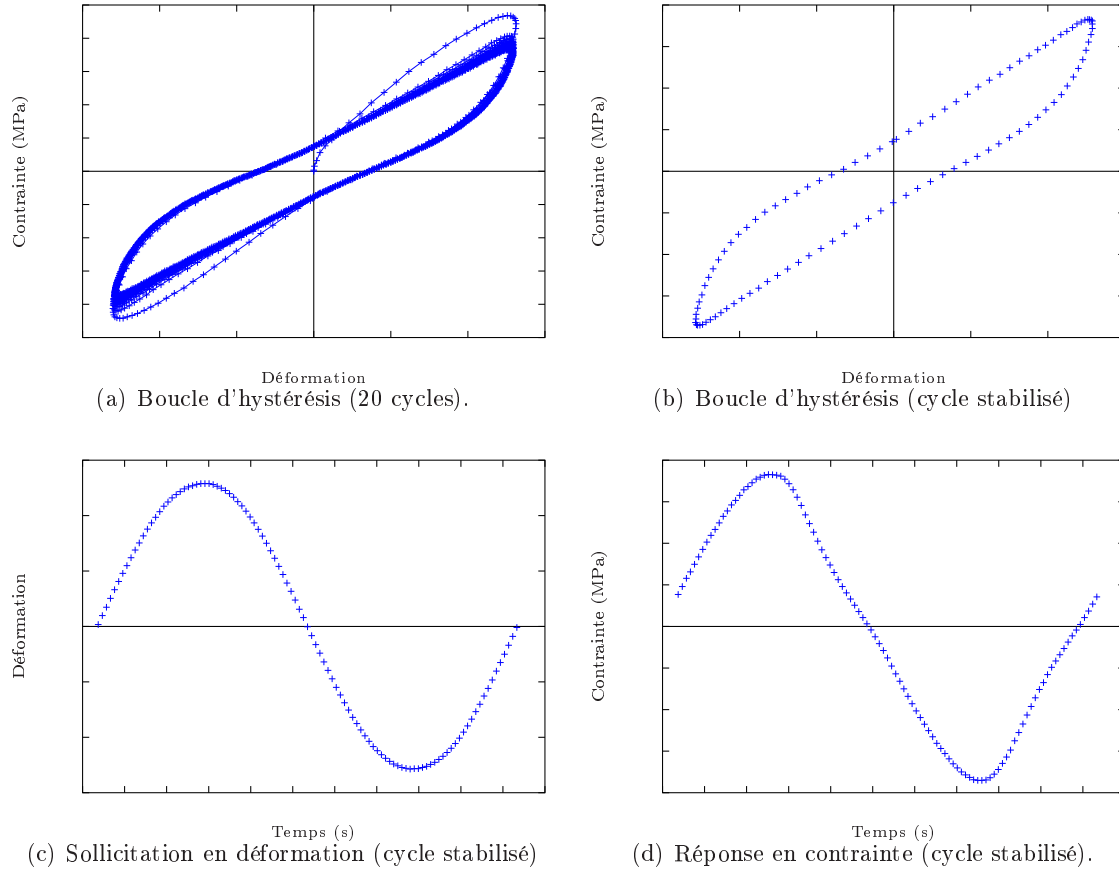
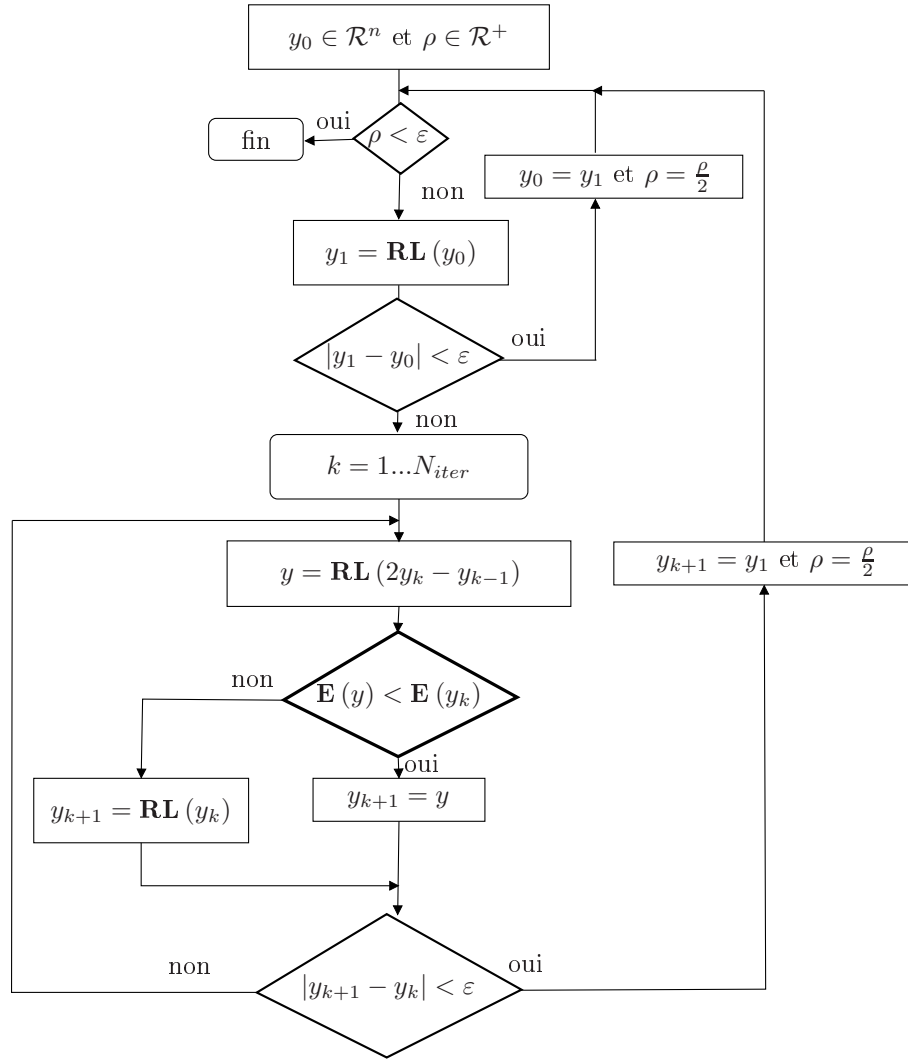


FIGURE V.14 – Essai cyclique de double cisaillement de type sinusoïdal tel que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 10\text{Hz}$  utilisé comme référence pour l'identification.

On définit les  $N_{exp}$  couples (temps, réponse en contrainte) de points expérimentaux par  $(t_i^{exp}, \tau_i^{exp})$  et leurs homologues théoriques par  $(t_i^{mod}, \tau_i^{mod})$  sachant que  $t_i^{exp} = t_i^{mod}$ . Ainsi, en notant  $\hat{\mathbf{X}}$  le vecteur composé des  $n$  paramètres  $\mathbf{X}_i$  du modèle à identifier, la détermination de ce vecteur peut se ramener à la minimisation de l'écart entre la courbe expérimentale et celle du modèle considéré. Cet écart peut être caractérisé par la distance des moindres carrés :

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{exp}} \left( \tau_i^{mod}(\hat{\mathbf{X}}) - \tau_i^{exp} \right)^2}. \quad (\text{V.72})$$

La résolution du problème de minimisation de cette distance s'effectue sans calcul de gradient en adoptant un algorithme itératif de minimisation (*cf.* FIG. V.15) développé par BOUKAMEL *et al.* [2001] dont le principe consiste à chercher de façon heuristique la direction et le pas permettant de réduire  $\mathbf{E}$  au cours d'une itération. On va donc fixer toutes les composantes du  $m$ -ième itéré  $\hat{\mathbf{X}}^m$  sauf une qui est choisie afin de minimiser  $\mathbf{E}$  (*cf.* Eq. V.72). D'une manière plus précise, on se donne un  $\hat{\mathbf{X}}^0$  arbitraire et on passe de  $\hat{\mathbf{X}}^m$  à  $\hat{\mathbf{X}}^{m+1}$  de la façon suivante :

FIGURE V.15 – *Algorithme itératif de minimisation développé par BOUKAMEL et al. [2001].*

On détermine  $\hat{X}_i^{m+1}$  pour  $i = 1$ , puis  $2, \dots$ , jusqu'à  $n$  par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\hat{X}_1^{m+1}, \dots, \hat{X}_{i+1}^{m+1}, \dots, \hat{X}_n^m) \leq \mathbf{E}(\hat{X}_1^{m+1}, \dots, \hat{X}_{i-1}^{m+1}, v_i, \hat{X}_{i+1}^m, \dots, \hat{X}_n^m) \\ \forall v_i \in \mathcal{R}. \end{cases} \quad (\text{V.73})$$

On appelle  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de l'espace des caractéristiques matérielles  $\hat{\mathbf{X}}$ . On pose  $y^0 = \hat{\mathbf{X}}$  ; l'élément  $y^1$  sera l'un des trois points  $y^0 - \rho e_1$ ,  $y^0$ ,  $y^0 + \rho e_1$  en lequel  $\mathbf{E}$  est minimum. Puis on construit de même  $y^2, \dots, y^n$ , en introduisant successivement  $e_2, \dots, e_n$ . On pose alors  $\mathbf{RL}(\hat{\mathbf{X}}, \rho) = y^n$  tel que  $\mathbf{RL}$  soit un opérateur de recherche locale à rayon de recherche  $\rho$  :

$$\mathbf{RL} \begin{cases} \mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^n \\ (\hat{\mathbf{X}}, \rho) \rightarrow \mathbf{RL}(\hat{\mathbf{X}}, \rho) \end{cases} \quad (\text{V.74})$$



Tous les développements et calculs réalisés pour utiliser cette méthode ont été effectués semi-analytiquement à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA<sup>®</sup>.

#### REMARQUE V.4

Pour quantifier la distance des moindres carrés entre les courbes expérimentales et leurs homologues théoriques, nous avons choisi l'expression de l'erreur relative suivante :

$$\mathbf{E}_{rel}(\hat{X}) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{exp}} \left( \tau_i^{mod}(\hat{X}) - \tau_i^{exp} \right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{exp}} (\tau_i^{exp})^2}}. \quad (\text{V.75})$$

Cette forme d'erreur permet alors de quantifier la corrélation modèles/expériences et de comparer les résultats d'identification quel que soit le modèle envisagé ou l'essai utilisé.

Cependant, cette écriture s'avère être un critère très sévère, une possibilité aurait été quantifier cette erreur relativement à  $N_{exp} \times \max_{i \in [1..N_{exp}]} |\tau_i^{exp}|$ . □

### V.4.2 Résultats d'identification

#### V.4.2.a Modèles de comportement viscoélastique

L'essai cyclique utilisé comme référence d'identification est de type sinusoïdal *i.e.*  $\gamma(t) = \gamma_d \sin(2\pi f_r t)$ .

Les deux paramètres expérimentaux sont alors une amplitude dynamique  $\gamma_d = 25\%$  et une fréquence de sollicitation  $f_r = 10Hz$ .

Dans un premier temps, on propose donc d'utiliser les modèles unitaires de type KELVIN-VOIGT, MAXWELL, ZENER et POYNTING-THOMSON représentatifs d'une vitesse de déformation donnée *i.e.* un temps caractéristique de relaxation (*cf.* § V.2.1.a).

Le TABLEAU V.4 présente un récapitulatif des paramètres identifiés et des erreurs relatives (*cf.* Eq. V.75). Malgré une homogénéisation des résultats autour de 12%, le modèle de KELVIN-VOIGT propose la meilleure identification d'un point de vue quantitatif.

Type de modèle	$a_0$ (MPa)	$a_1$ (ou $b_1$ ) (MPa)	$\eta_0$ (MPa.s)	$\eta$ (MPa.s)	Erreur (%)
KELVIN-VOIGT	C.E.	×	C.E.	×	11.21
MAXWELL	C.E.	×	C.E.	×	12.62
POYNTING-THOMSON	C.E.	C.E.	×	C.E.	12.29
ZENER	C.E.	C.E.	×	C.E.	12.54

TABLEAU V.4 – Résultats d'identification des modèles usuels généralisés aux grandes déformations à partir d'un essai cyclique sinusoïdal tel que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 10Hz$ .

Via une représentation graphique en terme de boucles d'hystérésis, nous confrontons la courbe réponse du modèle et celle de l'essai considéré (*cf.* FIG. V.16). Cette observation qualitative permet de constater que les quatres modèles corrélent convenablement l'expérience et semble proposer la même forme de boucle d'hystérésis. Cependant, cette forme "elliptique" ne représente pas les observations géométriques particulières proposées par ce type de chargement sur des élastomères silicones telles que :

- la présence d'un point anguleux aux amplitudes extrêmes de sollicitation,
- l'existence d'un étranglement de l'hystérésis au passage à l'origine des déformations.

L'examen de l'évolution suivant la fréquence de sollicitation des grandeurs caractéristiques  $E^*$  et  $\Phi_{/cycle}$  calculées pour les modèles semble proche de celui réalisé en petites déformations (*cf.* FIG. V.17). Une confrontation avec les résultats expérimentaux montre alors que ces modèles identifiés pour une fréquence donnée *i.e.*  $f_r = 10Hz$  ne peuvent rendre compte des évolutions significatives observées lorsqu'on se déplace sur un domaine de fréquence.

L'utilisation du modèle de MAXWELL généralisé intervient alors dans l'objectif de représenter

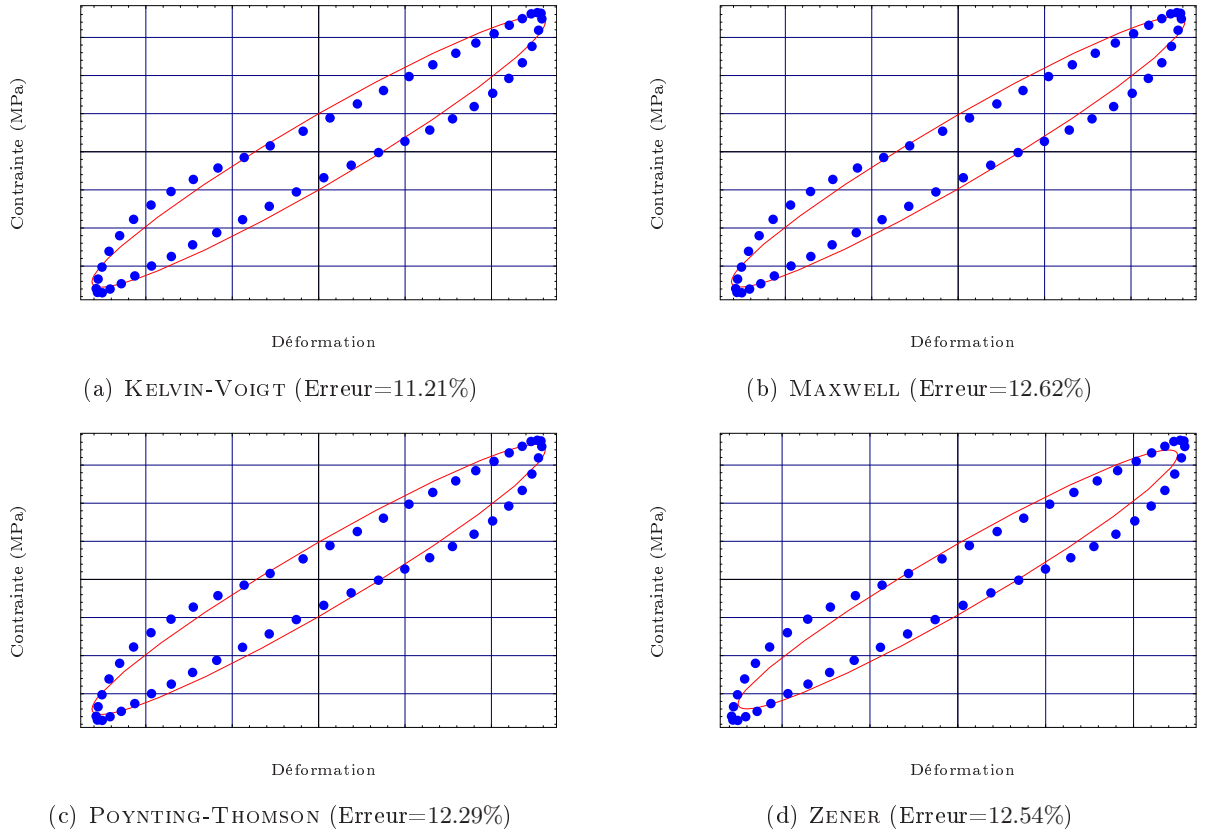


FIGURE V.16 – Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis des modèles unitaires classiques généralisés aux grandes déformations et identifiés sur un essai cyclique sinusoïdal tel que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 10Hz$ .

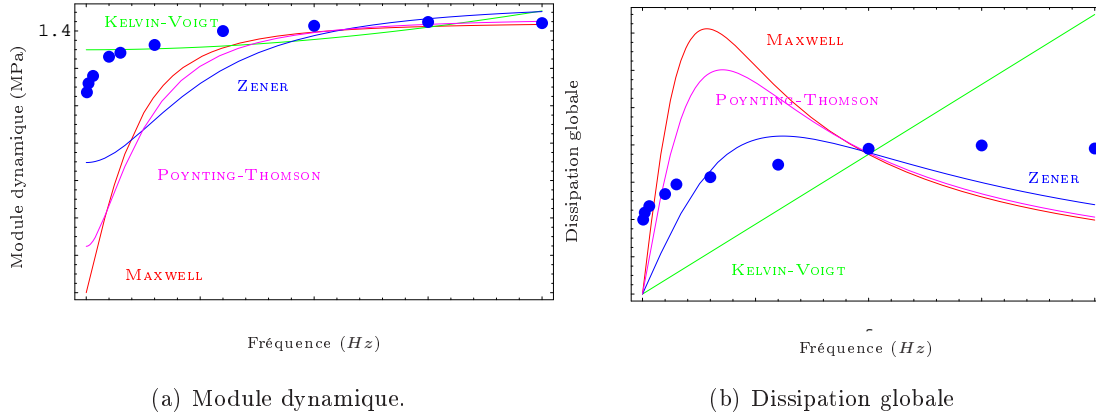


FIGURE V.17 – Confrontation modèles/expérience de l'évolution suivant la fréquence du module dynamique et de la dissipation globale des modèles unitaires en grandes déformations identifiés sur un essai cyclique sinusoïdal tel que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 10\text{Hz}$ .

convenablement cette influence de la fréquence sur le comportement du matériau. Puisque ce modèle possède  $N$  branches de type MAXWELL, il caractérise donc  $N$  temps caractéristiques de relaxation différents (cf. § V.2.1.a). Il semble alors que son utilisation permet de représenter convenablement les évolutions de nos deux grandeurs caractéristiques suivant la fréquence.

On propose l'exemple d'un modèle à 3 branches *i.e.*  $N = 3$  que l'on identifiera simultanément sur 5 essais cycliques sinusoïdaux *i.e.*  $\gamma_i(t) = \gamma_d \sin(2\pi f_{r_i} \times t)$  d'amplitude dynamique identique ( $\gamma_d = 25\%$ ) et respectivement les fréquences de  $f_{r_1} = 3\text{Hz}$ ,  $f_{r_2} = 6\text{Hz}$ ,  $f_{r_3} = 10\text{Hz}$ ,  $f_{r_4} = 15\text{Hz}$  et  $f_{r_5} = 20\text{Hz}$ .

Le TABLEAU V.5 présente les paramètres identifiés et les erreurs relatives obtenues pour chacun des essais. La moyenne des erreurs est à peu près de 12.7% avec un écart type de  $\pm 0.6\%$ . Elle est donc proche de celles obtenues dans l'identification des modèles unitaires sur un seul essai (cf. TAB. V.4).

L'observation de la FIGURE V.18 propose une forme elliptique des boucles d'hystérésis exhibées

i	$a_i$ (MPa)	$\eta_i$ (MPa.s)	Fréquence d'essai (Hz)	Erreur (%)
0	C.E.	×	3	12.43
1	C.E.	C.E.	6	13.73
2	C.E.	C.E.	10	12.39
			15	12.02
3	C.E.	C.E.	20	13.16

TABLEAU V.5 – Résultats d'identification du modèle de MAXWELL généralisé avec  $N = 3$  en grandes déformations réalisée simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux tels que,  $\gamma_d = 25\%$ , et  $f_{r_1} = 3\text{Hz}$ ,  $f_{r_2} = 6\text{Hz}$ ,  $f_{r_3} = 10\text{Hz}$ ,  $f_{r_4} = 15\text{Hz}$  et  $f_{r_5} = 20\text{Hz}$ .

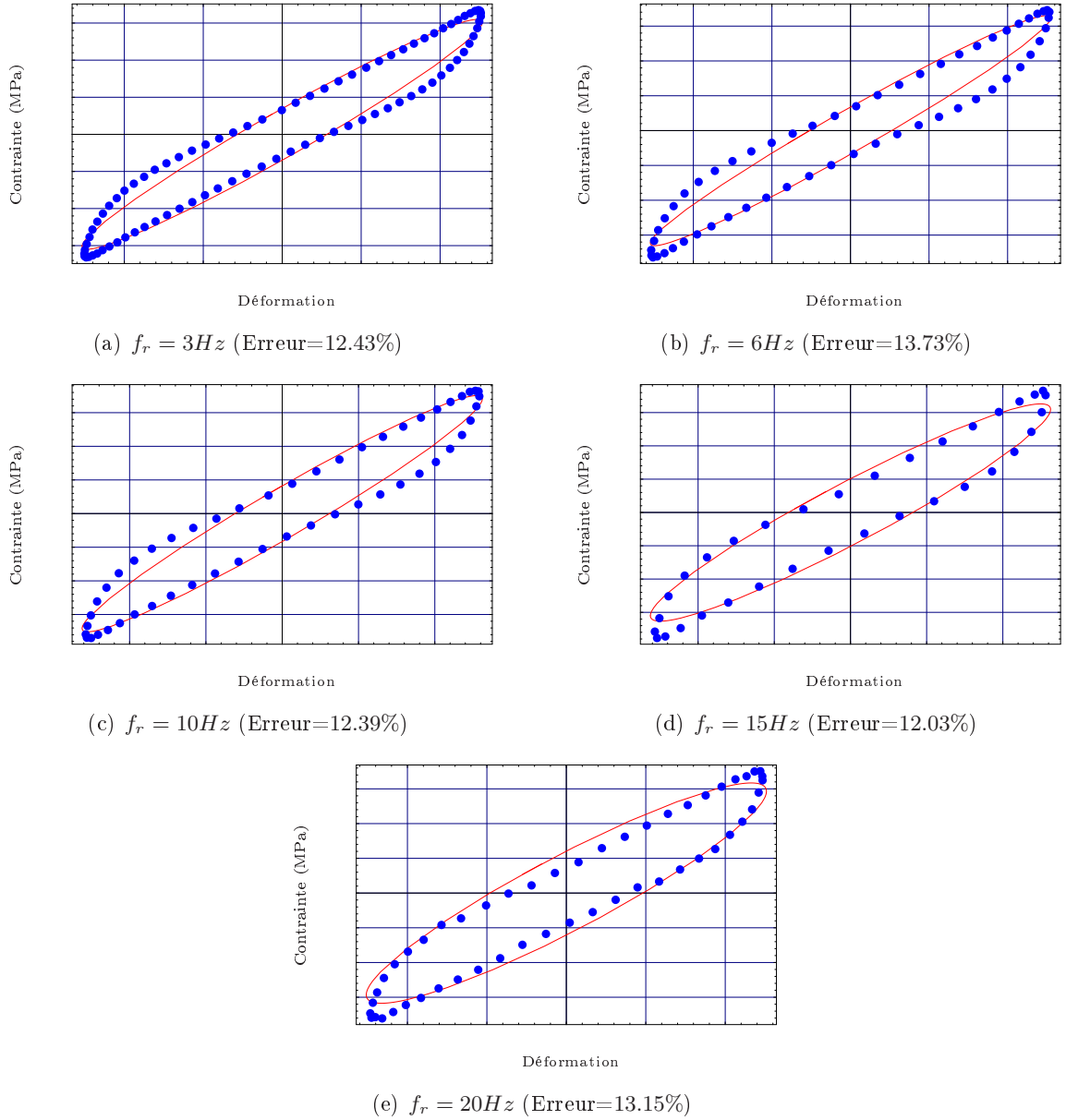


FIGURE V.18 – Confrontation modèle/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle de MAXWELL généralisé avec  $N = 3$  en grandes déformations identifié simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux pour une amplitude de sollicitation donnée  $\gamma_d = 25\%$  à diverses fréquences telles que  $f_{r1} = 3Hz$ ,  $f_{r2} = 6Hz$ ,  $f_{r3} = 10Hz$ ,  $f_{r4} = 15Hz$  et  $f_{r5} = 20Hz$ . L'erreur cumulée est alors de 63.73% qui revient à une moyenne de 12.74%.

par le modèle identifié comme pour les modèles unitaires (cf. FIG. V.16). Une confrontation aux réponses expérimentales permet de constater qualitativement une bonne corrélation quelle que soit la fréquence envisagée mais ne traduit toujours pas les observations géométriques particulières.

Une confrontation de l'évolution suivant la fréquence des grandeurs caractéristiques  $E^*$  et  $\Phi_{/cycle}$  calculées pour le modèle ainsi identifié face aux résultats expérimentaux propose une bonne représentation de l'évolution du module dynamique suivant la fréquence (*cf.* FIG. V.19(a)). Cependant, l'allure de la courbe représentative de la dissipation globale exhibée par le modèle suit une évolution plus qu'originale puisqu'elle fait intervenir deux maxima et deux minima (*cf.* FIG. V.19(b)). Malgré cela, les résultats obtenus avec un modèle multi-branche sont incontestablement plus proches de l'expérience que l'utilisation des modèles unitaires.

#### V.4.2.b Modèles de comportement viscoélastique avec enrichissement de la branche principale hyperélastique

Pour mieux représenter les boucles d'hystérésis, nous proposons d'enrichir les modèles d'une énergie libre hyperélastique plus avancée que celle proposée par le modèle de type NÉOHOOKÉEN. Ainsi, on espère que les modèles pourront traduire les observations géométriques expérimentales telles que la présence d'un point anguleux aux amplitudes extrêmes de sollicitation et l'existence d'un étranglement de l'hystérésis au passage à l'origine des déformations. Notre choix s'est porté sur le modèle de GENT-THOMAS comme les travaux de BOUKAMEL *et al.* [2001] le proposent :

$$\psi(I_1, I_2) = c_1(I_1 - 3) + c_2 \text{Ln} \left( \frac{I_2}{3} \right). \quad (\text{V.76})$$

On utilisera donc les modèles de type GENT-THOMAS et NEOHOOKE pour représenter respectivement les énergies libres principale et secondaires des modèles. Le TABLEAU V.6 propose une description à partir des modèles présentés au paragraphe V.3.2.

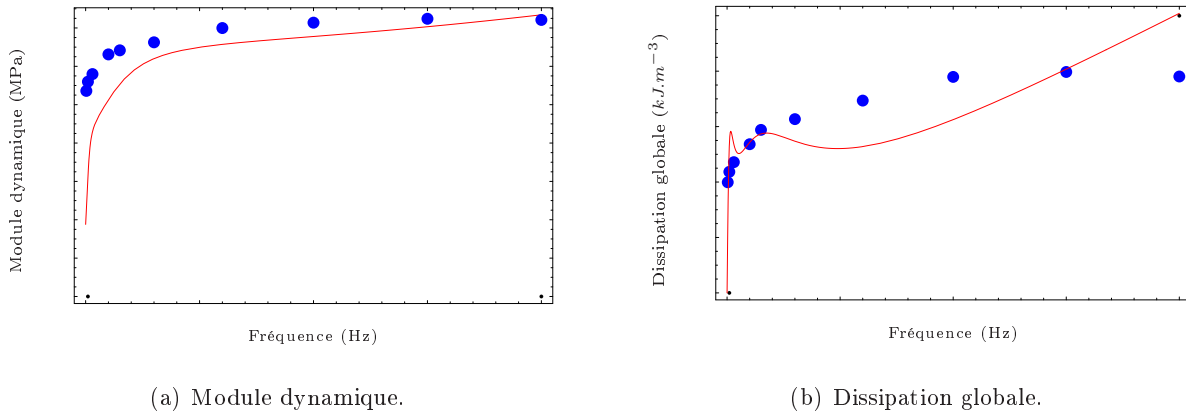


FIGURE V.19 – Confrontation modèle/expérience de l'évolution suivant la fréquence du module dynamique et de la dissipation globale du modèle de MAXWELL généralisé avec  $N = 3$  en grandes déformations identifié simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux pour une amplitude de sollicitation donnée  $\gamma_d = 25\%$  à diverses fréquences telles que  $f_{r1} = 3\text{Hz}$ ,  $f_{r2} = 6\text{Hz}$ ,  $f_{r3} = 10\text{Hz}$ ,  $f_{r4} = 15\text{Hz}$  et  $f_{r5} = 20\text{Hz}$ .

Par contre, la forme des pseudo-potentiels de dissipation reste identique. Dans ces conditions, on peut alors exprimer le nombre de paramètres à identifier par modèles :

- 3 pour le modèle de KELVIN-VOIGT :  $c_1$ ,  $c_2$  et  $\eta_0$ ,
- 3 pour le modèle de MAXWELL :  $c_1$ ,  $c_2$  et  $\eta$ ,
- 4 pour les modèle de ZENER et POYNTING-THOMSON :  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $a$  et  $\eta$ ,
- $2N + 2$  pour le modèle de MAXWELL généralisé :  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $a_i$  et  $\eta_i$ .

Le TABLEAU V.7 présente les paramètres identifiés et les erreurs relatives associés aux modèles. D'un point de vue quantitatif, on constate d'emblée que les résultats corrént d'avantage l'expérience que ceux proposés au paragraphe précédent. En effet, l'erreur relative diminue de 2.73% pour le modèle de KELVIN-VOIGT, 1.32% pour le modèle de MAXWELL, 0.05% pour le modèle de POYNTING-THOMSON et 2.74% pour le modèle de ZENER. Donc, seul le modèle de POYNTING-THOMSON ne propose pas d'évolution notable. Plusieurs raisons peuvent expliquer cela :

- nous sommes en présence d'un vecteur de paramètres solutions qui réalise une minimisation locale. L'algorithme d'identification utilisé n'est pas adapté,
- le modèle de GENT-THOMAS n'est pas assez riche,
- l'enrichissement doit être réalisé au niveau de la branche secondaire,
- ...

L'observation de la FIGURE V.20 montre que les boucles d'hystérésis exhibées par les modèles ne sont plus de forme elliptique comme au paragraphe précédent. Il est alors possible de les classer en deux familles suivant les observations géométriques qu'ils traduisent. On a donc :

- les modèles permettant la représentation du point anguleux aux amplitudes extrêmes de sollicitation qui représentent alors un comportement viscoélastique instantané (modèles de KELVIN-VOIGT et de ZENER),

	KELVIN-VOIGT	MAXWELL	ZENER	POYNTING-THOMSON	MAXWELL généralisé
Energie libre principale	$\psi_0$	$\psi_e$	$\psi_0$	$\psi_e$	$\psi_0$
Energie libre secondaire	$\times$	$\times$	$\psi_e$	$\psi_v$	$\psi_{e_i}$

TABLEAU V.6 – Type d'énergie libre selon le modèle de comportement viscoélastique

Type de modèle	$c_1$ (MPa)	$c_2$ (MPa)	$a_1$ (ou $b_1$ ) (MPa)	$\eta_0$ (MPa.s)	$\eta$ (MPa.s)	Erreur (%)
KELVIN-VOIGT	C.E.	C.E.	$\times$	C.E.	$\times$	8.48
MAXWELL	C.E.	C.E.	$\times$	C.E.	$\times$	11.3
POYNTING-THOMSON	C.E.	C.E.	C.E.	$\times$	C.E.	12.24
ZENER	C.E.	C.E.	C.E.	$\times$	C.E.	9.8

TABLEAU V.7 – Résultats d'identification des modèles unitaires enrichis à partir d'un essai cyclique sinusoïdal tel que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 10Hz$ .

- les modèles capabent de traduire l'étranglement au passage à l'origine de déformations, on parle alors de viscoélasticité retardée (modèle de MAXWELL).

A la vue des résultats obtenus avec l'enrichissement des modèles unitaires, on ne peut qu'être ambitieux concernant l'utilisation d'un modèle de MAXWELL généralisé.

Pour diminuer le temps de calcul d'identification, nous proposons de déterminer seulement les paramètres associés à la branche principale enrichie ( $c_1$  et  $c_2$ ) du modèle MAXWELL généralisé. Nous fixerons alors les autres paramètres suivant les résultats obtenus précédemment (*cf.* TAB. V.5). Nous avons donc réalisé le même protocole d'identification simultanée que pour le modèle non-enrichi. Les paramètres et les erreurs relatives sont répertoriés dans le TABLEAU V.8.

L'analyse quantitative des résultats permet d'obtenir une moyenne des erreurs d'à peu près  $11.51 \pm 0.79\%$ . L'enrichissement du modèle permet donc une meilleure corrélation avec l'expérience. En effet, l'erreur relative moyenne a subi une diminution de 1.23%.

La FIGURE V.21 permet de réaliser une observation qualitative des boucles d'hystérésis exhibées par le modèle à différentes fréquences. On constate alors une présence de moins en moins

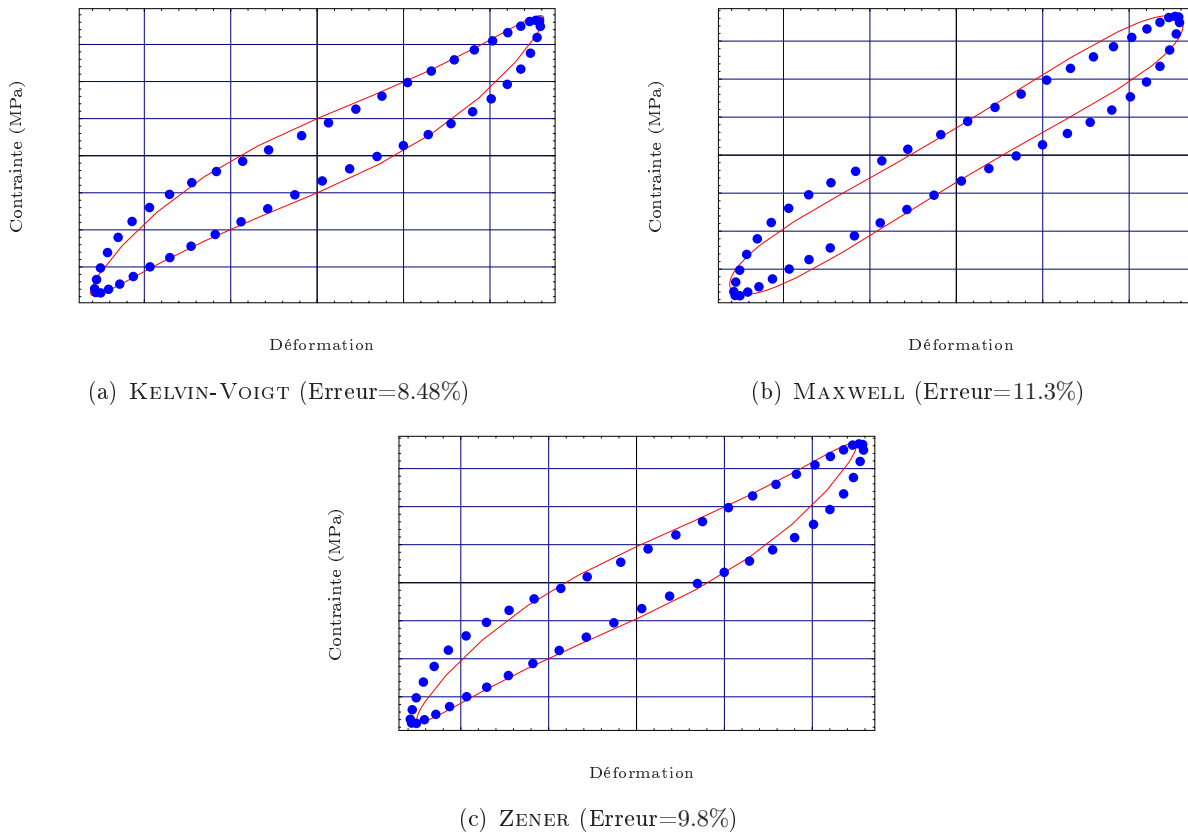


FIGURE V.20 – *Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis des modèles unitaires classiques généralisés aux grandes déformations et identifiés sur un essai cyclique sinusoïdal tel que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 10Hz$ .*

prononcée du point anguleux suivant celle-ci.

Une identification de tous les paramètres du modèle enrichi permettrait sûrement de pallier cela. Il est évident qu'un ajustement de tous les paramètres est nécessaire si l'on souhaite obtenir des résultats encore plus satisfaisants sur l'ensemble du domaine de fréquences de l'étude mais il ne sera pas réalisé ici.

			Fréquence d'essai (Hz)	Erreur (%)
Type de modèle	$c_1$ (MPa)	$c_2$ (MPa)	3	11.1
			6	12.44
MAXWELL généralisé	C.E.	C.E.	10	11.08
			15	10.74
			20	12.22

TABLEAU V.8 – *Résultats d'identification des paramètres de la branche principale enrichie du modèle de MAXWELL généralisé réalisée simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux tels que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_{r_1} = 3Hz$ ,  $f_{r_2} = 6Hz$ ,  $f_{r_3} = 10Hz$ ,  $f_{r_4} = 15Hz$  et  $f_{r_5} = 20Hz$ .*



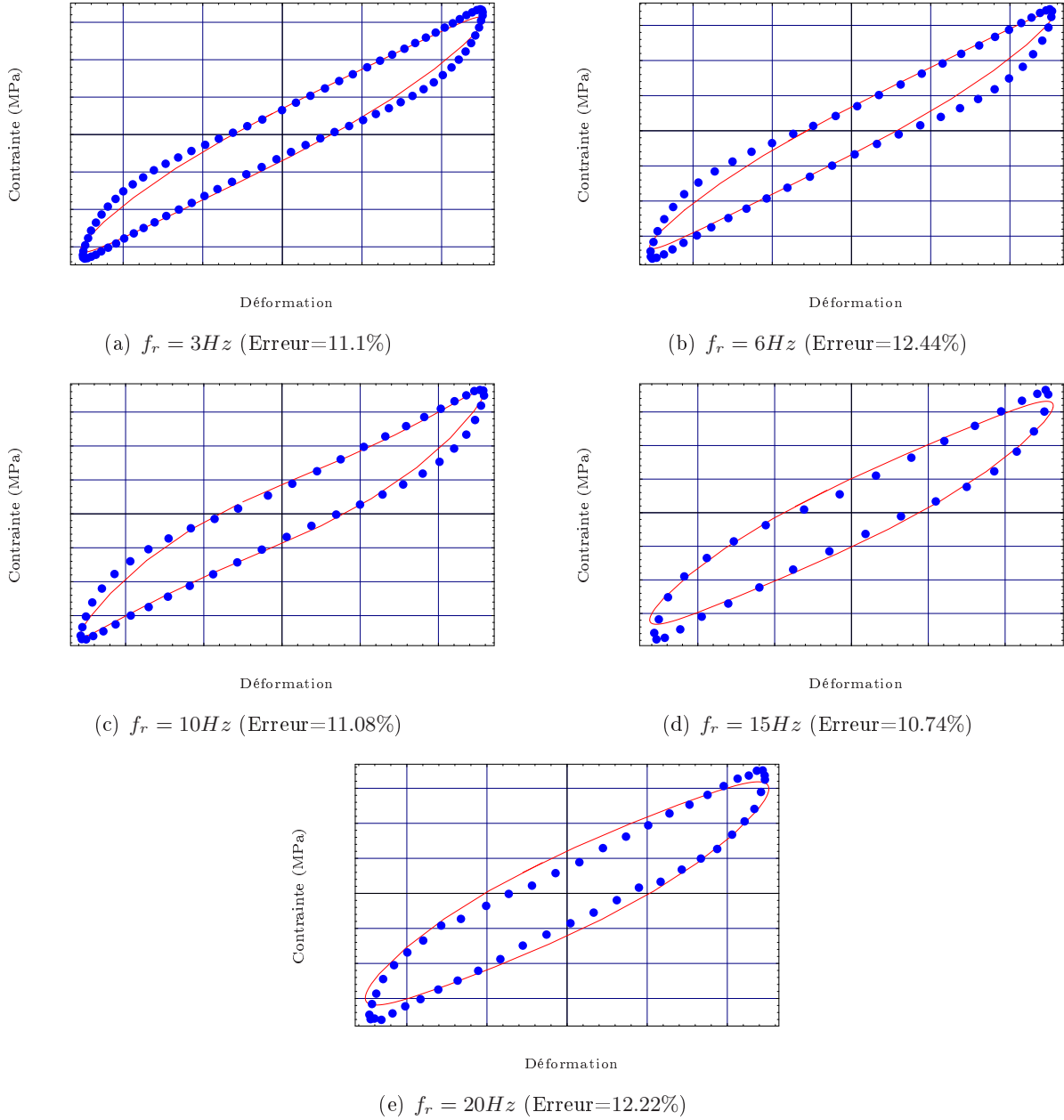


FIGURE V.21 – Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle de MAXWELL généralisé avec  $N = 3$  en grandes déformations et identifiés simultanément sur cinq essais cycliques sinusoidaux tels que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 3Hz$ ,  $f_r = 6Hz$ ,  $f_r = 10Hz$ ,  $f_r = 15Hz$  et  $f_r = 20Hz$ . L'erreur cumulée est alors de 57.57% qui revient à une moyenne de 11.51%.

### V.4.2.c Modèles de comportement élastoplastique

Nous utilisons dans ce paragraphe le protocole d'identification décrit au paragraphe V.4.1 en considérant un essai cyclique sinusoïdal comme référence d'identification *i.e.*  $\gamma(t) = \gamma_d \sin(2\pi f_r \times t)$  tel que  $\gamma_d = 25\%$  et  $f_r = 3Hz$ . Comme précédemment, on débutera par l'identification d'un modèle unitaire. On propose alors le modèle élastoplastique écrouissable ② permettant la description de l'assouplissement suivant l'amplitude (*cf.* § V.3.3).

Le TABLEAU V.9 présente un récapitulatif des paramètres identifiés et de l'erreur relative et la FIGURE V.22 propose une confrontation en terme de boucle d'hystérésis de la courbe réponse du modèle et celle de l'essai de référence. Le résultat est alors très satisfaisant tant d'un point de vue quantitatif que qualitatif. Ce modèle est alors aussi performant qu'un modèle unitaire viscoélastique enrichi pour une amplitude et une fréquence donnée.

La FIGURE V.23 illustre les évolutions suivant l'amplitude dynamique du module dynamique et de la dissipation globale calculés pour le modèle ainsi identifié. Il semble alors que l'assouplissement suivant l'amplitude dynamique est correctement représenté mais seulement pour des amplitudes supérieures à une déformation de  $\frac{\chi}{2 * (k_e + k_p)}$  sinon le module reste constant à  $2(k_e + k_p)$  (*cf.* FIG. V.23(a)). Par contre l'évolution linéaire de la dissipation ne permet pas une bonne corrélation avec l'expérience (*cf.* FIG. V.23(b)).

On peut alors observer ce constat via la FIGURE V.24 représentant une confrontation en terme de boucles d'hystérésis de la réponse du modèle à des essais cycliques sinusoïdaux d'amplitudes

$a_0$ (MPa)	$a_1$ (MPa)	$\chi$ (MPa)	Erreur (%)
C.E.	C.E.	C.E.	8.1654

TABLEAU V.9 – Résultats d'identification du modèle élastoplastique écrouissable ② en grandes déformations à partir d'un essai cyclique sinusoïdal tel que  $f_r = 3Hz$  et  $\gamma_{d_2} = 25\%$ .

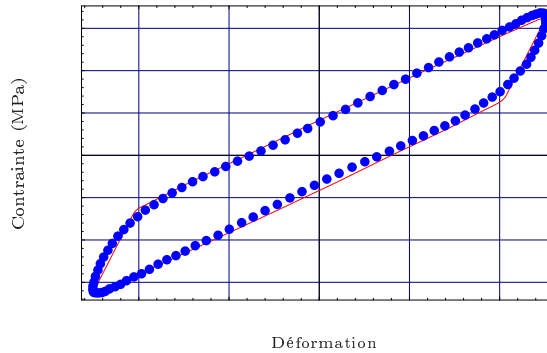


FIGURE V.22 – Confrontation modèle/expérience en terme de boucle d'hystérésis du modèle élastoplastique écrouissable ② en grandes déformations identifié sur un essai cyclique sinusoïdal tel que  $f_r = 3Hz$  et  $\gamma_{d_2} = 25\%$  (Erreur=8.16%).

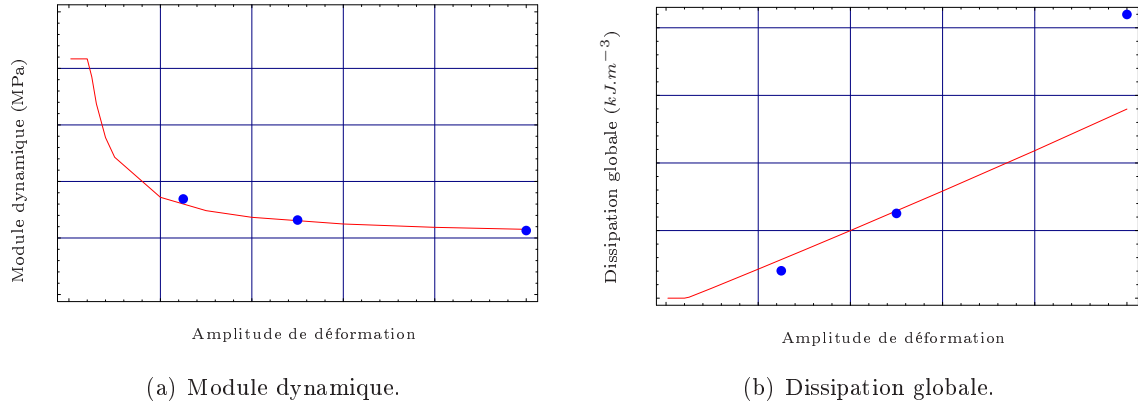


FIGURE V.23 – Confrontation modèle/expérience de l'évolution suivant l'amplitude de déformation du module de rigidité et de la dissipation globale du modèle élastoplastique écrouissable de type ② en grandes déformations identifié simultanément sur un essai cyclique sinusoïdal tel que  $f_r = 3Hz$  et  $\gamma_d = 25\%$ .

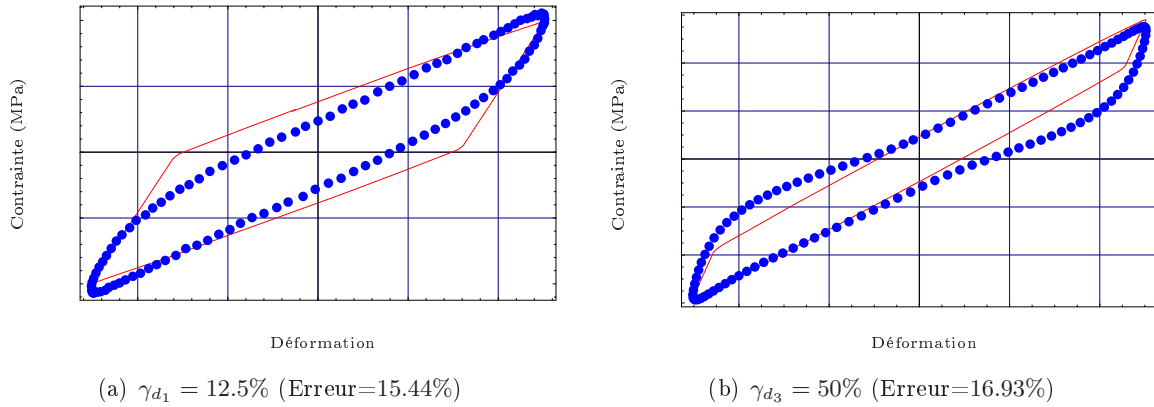


FIGURE V.24 – Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle élastoplastique écrouissable de type ② en grandes déformations identifié sur un essai cyclique sinusoïdal tel que  $f_r = 3Hz$  et  $\gamma_{d2} = 25\%$ . Observation de la réponse du modèle ainsi identifié à diverses amplitudes de déformation  $\gamma_{d1} = 12.5\%$  et  $\gamma_{d3} = 50\%$ .

différentes  $\gamma_{d1} = 12.5\%$  et  $\gamma_{d2} = 50\%$ .

Nous proposons alors d'utiliser le modèle de SAINT-VENANT généralisé. Ainsi comme au paragraphe précédent, on propose l'exemple d'un modèle à 3 branches *i.e.*  $N = 3$  que l'on identifiera simultanément sur 3 essais cycliques sinusoïdaux de fréquence identique ( $f_r = 3Hz$ ) et d'amplitudes dynamiques telles que  $\gamma_{d1} = 12.5\%$ ,  $\gamma_{d2} = 25\%$  et  $\gamma_{d3} = 50\%$ .

Le TABLEAU V.10 présente les paramètres identifiés et les erreurs relatives obtenues pour chacun des essais. La moyenne des erreurs est à peu près de 12.18% avec un écart type de  $\pm 1.75\%$ .

i	$a_i$ (MPa)	$\chi_i$ (MPa.s)	$\gamma_d$ de l'essai (%)	Erreur (%)
0	C.E.	$\times$	12.5	14.8
1	C.E.	C.E.	25	10.89
2	C.E.	C.E.	50	10.84
3	C.E.	C.E.		

TABLEAU V.10 – Résultats d'identification du modèle de SAINT-VENANT généralisé avec  $N = 3$  en grandes déformations réalisée simultanément sur trois essais cycliques sinusoïdaux tels que  $f_r = 3Hz$  et  $\gamma_{d1} = 12.5\%$ ,  $\gamma_{d2} = 25\%$  et  $\gamma_{d3} = 50\%$ .

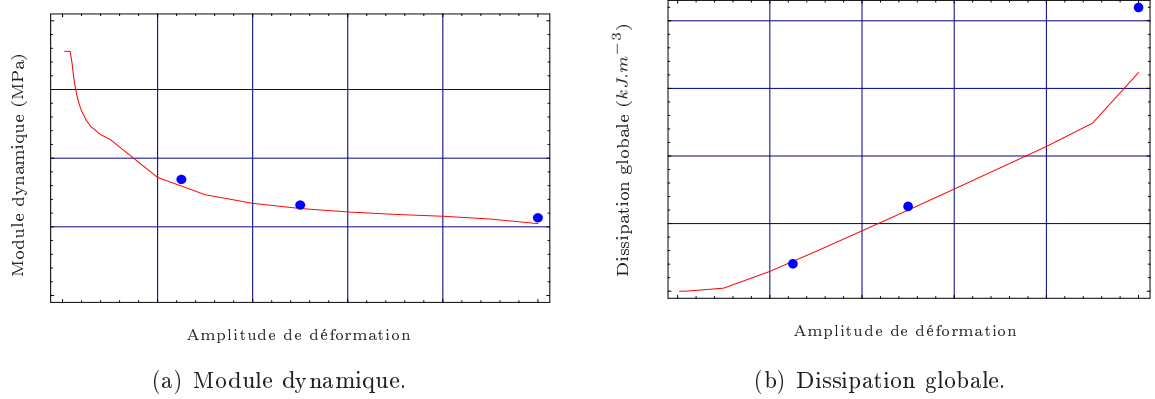


FIGURE V.25 – Confrontation modèle/expérience de l'évolution suivant l'amplitude de déformation du module de rigidité et de la dissipation globale du modèle de SAINT-VENANT généralisé avec  $N = 3$  en grandes déformations identifié simultanément sur trois essais cycliques sinusoïdaux tels que  $f_r = 3Hz$  et  $\gamma_{d1} = 12.5\%$ ,  $\gamma_{d2} = 25\%$  et  $\gamma_{d3} = 50\%$ .

Qualitativement, ce modèle est donc plus performant que le modèle unitaire lorsqu'on considère les trois essais d'amplitudes différentes.

La FIGURE V.26 illustre les boucles d'hystérésis exhibées par le modèle ainsi identifié. D'un point de vue qualitatif, une confrontation aux réponses expérimentales montre une bonne corrélation pour les sollicitations d'amplitudes dynamiques importantes ( $\gamma_{d2} = 25\%$  et  $\gamma_{d3} = 50\%$ ). Cependant, le modèle reste encore peu performant pour les faibles amplitudes de déformation ( $\gamma_{d1} = 12.5\%$ ).

La confrontation de l'évolution suivant l'amplitude dynamique des grandeurs caractéristiques  $E^*$  et  $\Phi_{/cycle}$  face aux résultats expérimentaux propose une bonne représentation des phénomènes observables expérimentalement (cf. FIG. V.25).

Les résultats obtenus avec un modèle multi-branche sont donc plus intéressants que ceux obtenus avec un modèle unitaire.

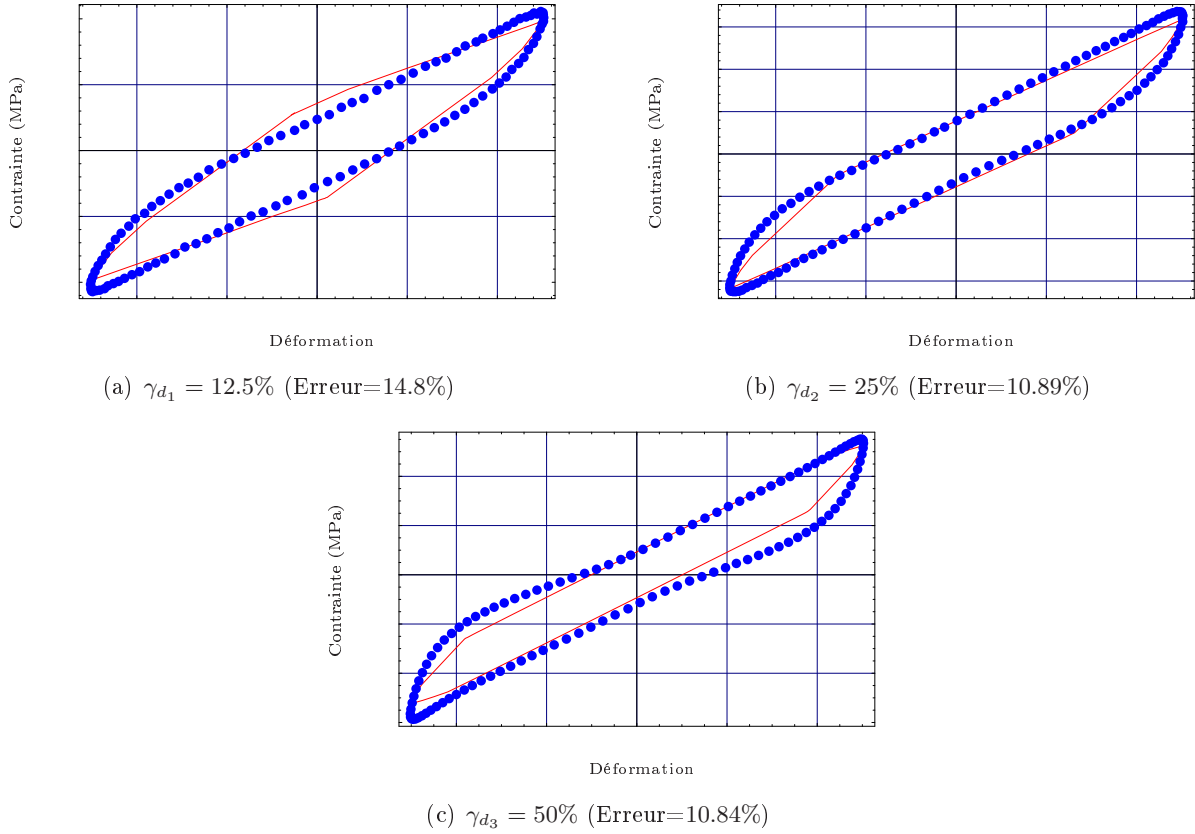


FIGURE V.26 – *Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle de SAINT-VENANT généralisé avec  $N = 3$  en grandes déformations identifié simultanément sur trois essais cycliques sinusoidaux tels que  $f_r = 3Hz$  et  $\gamma_{d_1} = 12.5\%$ ,  $\gamma_{d_2} = 25\%$  et  $\gamma_{d_3} = 50\%$  (Erreur moyenne=11.25%).*

## V.5 Conclusion

La synthèse bibliographique des modèles de comportement dissipatif appliqués aux élastomères chargés a permis de distinguer diverses orientations provenant d'une perte d'énergie due au frottement interne visqueux (chaîne-chaîne), ou non-visqueux (chaîne-charge et charge-charge), voire l'apparition de décohésion, de cavitations... A ces phénomènes microstructuraux, on peut associer respectivement des familles de comportement comme la viscoélasticité, l'élastoplasticité ou l'endommagement. Ainsi, les modèles foisonnent au sein même de chaque famille et aucun consensus ne se dessine nettement.

Motivés par la représentation des phénomènes expérimentaux observés au CHAPITRE III, nous avons fait le choix de réaliser une première approche phénoménologique de type différentielle du comportement dissipatif. Ainsi, tous nos développements se sont restreints au cadre thermodynamique appliqué aux grandes déformations associé à la généralisation des modèles rhéologiques via la notion d'états intermédiaires définis en ANNEXE A. Ainsi, nous avons opté pour les modèles

de comportement

- viscoélastique pour leur capacité à rendre compte de l'influence de la fréquence sur la réponse *i.e.* modèle de type KELVIN-VOIGT, MAXWELL, POYNTING-THOMSON, ZENER et MAXWELL généralisé,
- élastoplastique écrouissable permettant alors de représenter le phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude dynamique *i.e.* modèle de type élastoplastique écrouissable ② et SAINT-VENANT généralisé.

Nous avons ensuite mené une campagne d'identification des paramètres de ces modèles à partir d'essais cycliques sinusoïdaux en double cisaillement réalisés à température ambiante. La minimisation au sens des moindres carrés s'est alors effectué via un algorithme développé par A. BOUKAMEL (*cf.* FIG. V.15). Les enseignements que l'on a pu tirer de ce travail sont les suivants :

- les modèles hyper-viscoélastiques unitaires corrént convenablement l'expérience pour une sollicitation cylique donnée (*i.e.* une amplitude et une fréquence données),
- l'utilisation d'un modèle de MAXWELL généralisé permet la couverture d'un domaine de fréquence. La largeur de ce domaine semble liée à son nombre de branches,
- l'enrichissement de la branche hyperélastique principale des modèles hyper-visco-élastiques permet une meilleure corrélation avec l'expérience. De plus suivant le modèle, on observe la présence du point anguleux aux amplitudes extrêmes de sollicitation ou de l'étranglement de l'hystérésis au passage à l'origine des déformations.
- aussi bien qualitativement que quantitativement, la corrélation la plus fine avec l'expérience (sollicitation cyclique donnée) a été réalisée via l'utilisation du modèle hyper-élastoplastique écrouissable ②. De plus, ce type de modèle rend compte du phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude,
- l'utilisation d'un modèle de SAINT-VENANT généralisé permet une bonne description des phénomènes induits par une évolution de l'amplitude dynamique pour une fréquence fixée.

Nous envisageons donc pour répondre aux divers constats expérimentaux décrits au CHAPITRE III de prendre les directions suivantes :

- la généralisation du modèle viscoélastique multi-branches (MAXWELL généralisé) à une infinité de branches en grandes déformations permettant alors d'augmenter le domaine de validité du modèle en fréquence. RAMRAKHYANI et SMITH [2004] ont utilisé ce type de généralisation pour le modèle de SAINT-VENANT généralisé dans le cadre des petites déformations,
- l'utilisation d'essais cycliques triangulaires à amplitude progressive décrits au CHAPITRE III et permettant ainsi de coupler l'influence de la fréquence et de l'amplitude dynamique,

- le couplage des comportements hyper-visco-élastique et hyper-élastoplastique comme le proposent les auteurs OLSSON et AUSTRELL [2001] dans le cadre des petites déformations et MIEHE et KECK [2000] via un formalisme lagrangien en grandes déformations (*cf.* FIG. V.27).

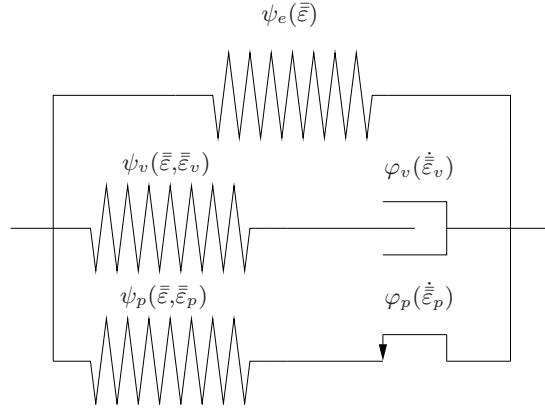


FIGURE V.27 – *Illustration rhéologique du modèle élasto-viscoélasto-plastoélastique de [MIEHE et KECK, 2000]*

---

## Approche statistique d'un modèle hyper-visco-plastique

**C**e chapitre présente l'approche utilisée pour développer un modèle statistique hyper-viscoélastique capable de couvrir un large spectre de fréquences. On propose alors une identification des paramètres pour le domaine de fréquences d'utilisation des adaptateurs de fréquence. Cependant, alors que le modèle corrèle convenablement l'expérience, il ne traduit pas l'assouplissement suivant l'amplitude de chargement symptomatique de l'effet PAYNE. Dès lors, l'enrichissement du modèle par une branche élasto-plastique offre au modèle la capacité de représenter ce phénomène et par la même de meilleurs résultats d'identification.

Une validation est proposée en confrontant le modèle statistique hyper-visco-plastique identifié face à des essais cycliques composés de plusieurs harmoniques ou sinusoïdaux avec pré-déformation. Le modèle corrèle alors convenablement l'expérience tant d'un point de vue quantitatif que qualitatif. Nous proposerons ensuite une interprétation méso-physiquement motivée du modèle permettant une meilleure représentativité de ses éléments constitutifs.

Enfin, nous présenterons une campagne d'identification à différentes températures qui nous a permis de définir des lois d'évolution des paramètres matériaux en fonction de la température.



## PLAN DU CHAPITRE VI

---

<b>VI.1 Approche statistique hyper-visco-élastique . . . . .</b>	<b>159</b>
VI.1.1 Présentation du modèle . . . . .	159
VI.1.1.a Point de départ et motivations . . . . .	159
VI.1.1.b Modèle statistique discret . . . . .	161
VI.1.1.c Modèle statistique continu . . . . .	162
VI.1.1.d Choix des potentiels . . . . .	163
VI.1.1.e Choix des fonctions . . . . .	164
VI.1.2 Résultats d'identification . . . . .	166
<b>VI.2 Prise en compte de la plasticité . . . . .</b>	<b>168</b>
VI.2.1 Association d'une branche élasto-plastique . . . . .	168
VI.2.2 Elaboration d'une stratégie d'identification . . . . .	170
VI.2.3 Résultats d'identification . . . . .	171
<b>VI.3 Confrontation modèles/expériences . . . . .</b>	<b>175</b>
VI.3.1 Sollicitations cycliques sinusoïdales . . . . .	175
VI.3.2 Sollicitations sinusoïdales à deux harmoniques . . . . .	177
VI.3.3 Sollicitations sinusoïdales à trois harmoniques . . . . .	180
VI.3.4 Sollicitations cycliques sinusoïdales avec pré-déformation . . . . .	181
<b>VI.4 Influence des paramètres matériaux . . . . .</b>	<b>182</b>
<b>VI.5 Vers une interprétation physique du modèle . . . . .</b>	<b>186</b>
<b>VI.6 Identification des paramètres à différentes températures . . . . .</b>	<b>189</b>
VI.6.1 Présentation . . . . .	189
VI.6.2 Résultats d'identification . . . . .	189
VI.6.3 Evolution des paramètres suivant la température . . . . .	198
<b>VI.7 Conclusion . . . . .</b>	<b>201</b>

---

## VI.1 Approche statistique hyper-visco-élastique

L'approche statistique d'un modèle de comportement hyper-visco-élastique en grandes déformations va s'articuler autour des points suivants :

- une présentation de la démarche de construction d'un modèle statistique hyper-visco-élastique noté dans la suite : modèle SHV,
- une identification des paramètres, réalisée sur des essais en double cisaillement à température ambiante de type cyclique triangulaire à amplitude progressive permettant ainsi de coupler les phénomènes induits par la fréquence et l'amplitude du chargement.

### VI.1.1 Présentation du modèle

Nous allons en premier lieu présenter les enseignements fournis par des travaux antérieurs qui ont appuyé notre motivation de construire un modèle SHV. Ainsi, via des considérations statistiques, on évoluera des modèles discrets vers les modèles continus. A ce stade, il sera alors nécessaire de choisir une forme des potentiels et des fonctions caractéristiques associées.

#### VI.1.1.a Point de départ et motivations

Dans le cadre des petites perturbations, on a l'habitude de caractériser les modèles unitaires de comportement viscoélastique tels que le modèle de ZENER<sup>(1)</sup> (*cf.* FIG. V.1(c)) par un temps caractéristique de relaxation unique noté  $\tau$  qui dans le cas monodimensionnel s'exprime par  $\tau = \frac{\eta}{2k}$ . Généralement, pour augmenter le domaine de validité temporel (ou fréquentiel) de ces modèles, on utilise des modèles multi-branches *i.e.* modèles de MAXWELL généralisé (*cf.* FIG. V.1(e)) association en parallèle de  $N$  branches de type MAXWELL. Nous sommes alors en présence de  $N$  temps caractéristiques de relaxation  $\tau_i = \frac{\eta_i}{2k_i}$  avec  $i \in [1..N]$  (*cf.* ANNEXE C.1.3).

Comme point de départ, nous nous sommes donc basés sur les travaux réalisés entre autres par [LEONOV, 1992 ; LE TALLEC et RAHIER, 1994 ; GABRIELI, 1995 ; MÉO, 2000 ; MIEHE et KECK, 2000 ; NEDJAR, 2002] qui utilisent une généralisation aux grandes déformations des modèles rhéologiques et sur les développements antérieurs effectués dans [BOUKAMEL et MÉO, 2001, 2002 ; MÉO *et al.*, 2003]. Parmi tous les enseignements que l'on a pu tirer de ces études, on notera par exemple :

- l'intérêt très limité d'une forme non-linéaire de la viscosité pour refléter convenablement le comportement dans un large domaine de fréquences de sollicitations,
- et l'incapacité des modèles unitaires à rendre compte de la réponse du matériau sous sollicitations cycliques combinées (composées de plusieurs harmoniques ou associées à un

---

(1). Dans le cadre des petites perturbations, les modèles unitaires de ZENER et POYNTING-THOMSON sont équivalents.

pré-chargement statique) pour un jeu de paramètres donné.

Or, l'étude menée au paragraphe V.4.2.a et les travaux réalisés dans [MARTINEZ *et al.*, 2002] montrent que la généralisation en grandes déformations d'un assemblage en parallèle de plusieurs modèles unitaires, par exemple le modèle de MAXWELL généralisé, est capable de refléter convenablement le comportement du matériau dans un large domaine de fréquences de sollicitation (voir aussi [LION, 1998 ; HAUPT *et al.*, 2000]).

Ainsi, il semble que les modèles multi-branches sont capables de représenter les chargements combinés définis précédemment. Cependant, ils présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de paramètres à identifier.

Nous proposons alors une approche qui généralisera les assemblages mono-branches à une infinité de branches via des méthodes statistiques (*cf.* FIG. VI.1). L'apport de la généralisation statistique réside en une couverture d'un large spectre de fréquences sans présenter un nombre important de paramètres à identifier (de l'ordre du nombre de paramètres d'un modèle unitaire).

#### REMARQUE VI.1

Comme pour les développements réalisés au CHAPITRE V, le formalisme mécanique adopté ici sera celui présenté au paragraphe V.3.1 basé sur la cadre thermodynamique introduit en ANNEXE A.

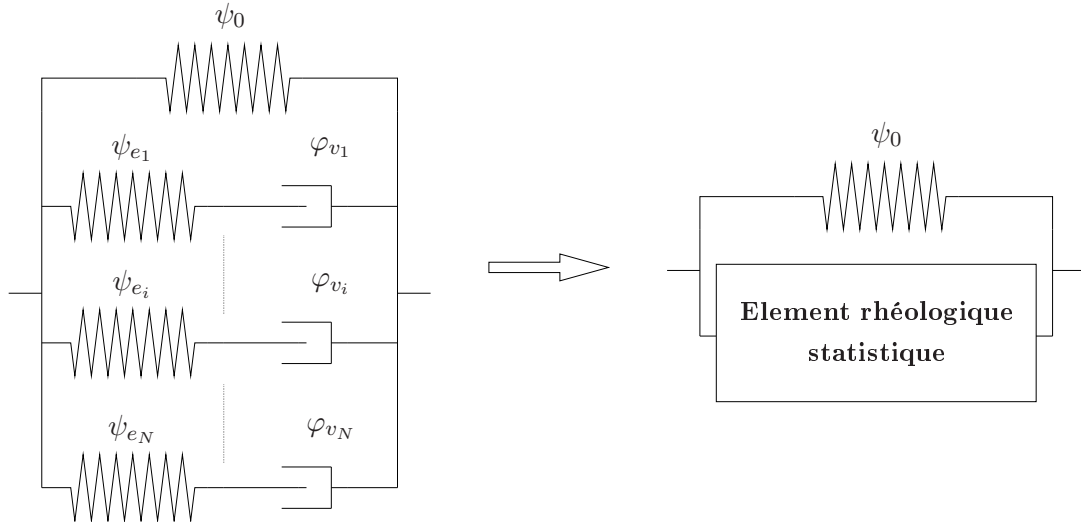


FIGURE VI.1 – Généralisation d'un modèle de MAXWELL généralisé (à  $N$  branches) à un modèle statistique possédant une infinité de branches

### VI.1.1.b Modèle statistique discret

Avant de définir un modèle continu possédant une infinité de branches, nous nous plaçons préalablement à une étape intermédiaire du développement où l'on considère un modèle statistique discret composé de  $N$  branches (*cf.* FIG. VI.2).

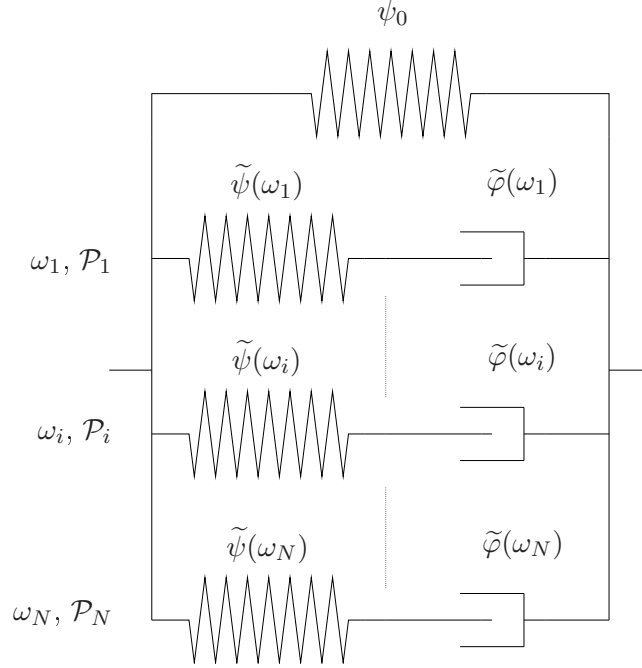


FIGURE VI.2 – *Modèle statistique hyper-visco-élastique discret.*

On pondère alors chaque branche  $\omega_i$  (caractérisant un unique temps de relaxation  $\tau_i$ ) par un poids  $\mathcal{P}_i$ ,  $\forall i \in [1..N]$ . On peut ainsi écrire l'énergie libre spécifique  $\psi$  et le pseudo-potentiel de dissipation  $\varphi^{int}$  comme suit :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \sum_{i=1}^N \tilde{\psi}(\omega_i, \bar{\bar{B}}_e^i(\omega_i)) \mathcal{P}_i, \\ \varphi^{int} = \sum_{i=1}^N \tilde{\varphi}(\omega_i, \bar{\bar{D}}_v^i(\omega_i)) \mathcal{P}_i. \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

L'introduction de la relation VI.1 au formalisme mécanique développé au paragraphe V.3.1 (*cf.* Eq. V.59) conduit à l'écriture de la loi de comportement telle que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{\bar{\sigma}}_i(\omega_i) \mathcal{P}_i - p \bar{\bar{1}} \text{ avec } \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}}_0 = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi_0(\bar{\bar{B}})}{\partial \bar{\bar{B}}} \right]^D, \\ \tilde{\bar{\sigma}}_i(\omega_i) = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}}_e^i(\omega_i) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega_i, \bar{\bar{B}}_e^i(\omega_i))}{\partial \bar{\bar{B}}_e^i(\omega_i)} \right]^D, \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

et les lois complémentaires suivantes :

$$2\rho \left[ \bar{\bar{V}}_e^i(\omega_i) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega_i, \bar{\bar{B}}_e^i(\omega_i))}{\partial \bar{\bar{B}}_e^i(\omega_i)} \cdot \bar{\bar{V}}_e^i(\omega_i) \right]^D = \frac{\partial \tilde{\varphi}(\omega_i, \bar{\bar{D}}_v^o(\omega_i))}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o(\omega_i)}, \forall i \in [1..N]. \quad (\text{VI.3})$$

### VI.1.1.c Modèle statistique continu

En généralisant l'équation VI.1 à un modèle statistique continu (*cf.* FIG. VI.3), on obtient :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \int_0^\infty \tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega)) \mathcal{P}(\omega) d\omega, \\ \varphi^{int} = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\omega, \bar{\bar{D}}_v^o(\omega)) P(\omega) d\omega, \end{cases} \quad (\text{VI.4})$$

où  $\mathcal{P}(\omega)$  est une fonction de pondération dépendant de la variable aléatoire  $\omega$ .

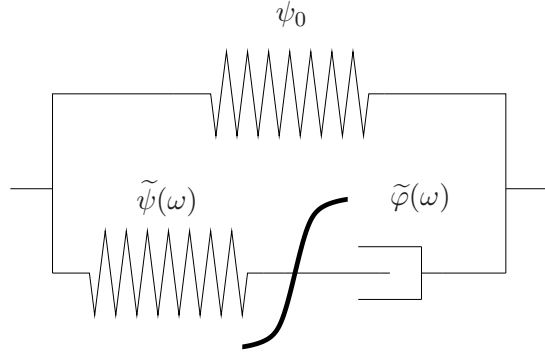


FIGURE VI.3 – *Modèle statistique hyper-visco-élastique continu.*

Le comportement est alors gouverné par les lois suivantes :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_0 + \int_0^\infty \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega - p \bar{\bar{1}} \text{ avec } \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}}_0 = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi_0(\bar{\bar{B}})}{\partial \bar{\bar{B}}} \right]^D, \\ \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}}_e(\omega) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega))}{\partial \bar{\bar{B}}_e(\omega)} \right]^D \end{cases} \quad (\text{VI.5})$$

et  $\forall \omega \geq 0$

$$2\rho \left[ \bar{\bar{V}}_e(\omega) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega))}{\partial \bar{\bar{B}}_e(\omega)} \cdot \bar{\bar{V}}_e(\omega) \right]^D = \frac{\partial \tilde{\varphi}(\omega, \bar{\bar{D}}_v^o(\omega))}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o(\omega)}. \quad (\text{VI.6})$$

Or puisque l'énergie libre est une fonction scalaire isotrope des deux premiers invariants de la transformation (*i.e.* incompressibilité du matériau), on peut écrire :

$$\begin{cases} \psi_0(\bar{\bar{B}}) = \psi_0(I_1, I_2), \\ \tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega)) = \tilde{\psi}(I_1^e(\omega), I_2^e(\omega)). \end{cases} \quad (\text{VI.7})$$

Les équations VI.5 et VI.6 peuvent alors s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \int_0^\infty \tilde{\tilde{\sigma}}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega - p\bar{1}, \\ \bar{\sigma}_0 = 2\rho \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \bar{B} - \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \bar{B}^{-1} \right]^D, \\ \tilde{\tilde{\sigma}}(\omega) = 2\rho \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_1^e(\omega)} \bar{B}_e(\omega) - \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_2^e(\omega)} \bar{B}_e^{-1}(\omega) \right]^D, \\ 2\rho \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_1^e(\omega)} \bar{B}_e(\omega) - \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega)}{\partial I_2^e(\omega)} \bar{B}_e^{-1}(\omega) \right]^D = \frac{\partial \tilde{\varphi}(\omega, \bar{D}_v^o(\omega))}{\partial \bar{D}_v^o(\omega)}. \end{array} \right. \quad (\text{VI.8})$$

#### VI.1.1.d Choix des potentiels

Les équations régissant le modèle statistique continu étant ainsi posées, il nous reste à choisir les potentiels que nous allons utiliser dans la suite de l'étude. Nous adoptons les formes de potentiels suivantes :

- les potentiels d'énergie libre sont choisis de forme hyperélastique incompressible néohookeenne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = C_1(I_1 - 3), \\ \tilde{\psi}(\omega) = G(\omega)(I_1^e(\omega) - 3), \end{array} \right. \quad (\text{VI.9})$$

permettant ainsi de nous assurer de la vérification des conditions de stabilité matérielle des lois hyperélastiques en supposant la positivité de  $C_1$  et  $G(\omega)$ ,  $\forall \omega > 0$

- le pseudo-potential de dissipation visqueux est quadratique en  $\bar{D}_v^o(\omega)$  tel que :

$$\tilde{\varphi}(\omega, \bar{D}_v^o(\omega)) = \frac{\eta(\omega)}{2} \bar{D}_v^o(\omega) : \bar{D}_v^o(\omega). \quad (\text{VI.10})$$

Les équations du modèle SHV s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \int_0^\infty \tilde{\tilde{\sigma}}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega - p\bar{1}, \\ \bar{\sigma}_0 = 2\rho \left[ C_1 \bar{B} \right]^D \\ \tilde{\tilde{\sigma}}(\omega) = 2\rho \left[ G(\omega) \bar{B}_e(\omega) \right]^D, \\ 2\rho \left[ G(\omega) (\bar{B}_e(\omega)) \right]^D = \frac{\partial \tilde{\varphi}(\omega)}{\partial \bar{D}_v^o(\omega)}, \end{array} \right. \quad (\text{VI.11})$$

A ce stade, il nous reste à définir les fonctions utilisées pour représenter les évolutions des fonctions caractéristiques hyperélastique  $G(\omega)$  et visqueuse  $\eta(\omega)$  ainsi que la fonction de pondération  $\mathcal{P}(\omega)$  suivant la variable aléatoire  $\omega$ .

### VI.1.1.e Choix des fonctions

De nombreux couples de fonctions caractéristiques de formes différentes ont été essayés. Les fonctions caractéristiques hyperélastique et visqueuse qui ont présentées les résultats les plus satisfaisants sont telles que :

$$G(\omega) = G_0(\dots) \quad \text{et} \quad \eta(\omega) = \eta_\infty(\dots). \quad (\text{VI.12})$$

On peut ainsi exprimer le temps caractéristiques de relaxation comme suit :

$$\tau(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{2G(\omega)} = \dots \quad (\text{VI.13})$$

Nous proposons d'observer l'évolution suivant la variable aléatoire  $\omega$  à travers une représentation schématique (cf. FIG. VI.4) nous permettant ainsi de fournir une signification plus physique. Les grandes lignes de description sont les suivantes :

- concernant  $G(\omega)$ , nous avons opté pour une forme fonction d'une caractéristique hyperélastique constante  $G_0$ ,
- le choix de  $\eta(\omega)$  s'est porté sur une forme fonction d'une caractéristique visqueuse constante  $\eta_\infty$ ,
- l'expression de la fonction du temps caractéristique de relaxation peut être vue comme une évolution non-linéaire décroissante de l'infini vers 0 (cf. FIG. VI.4).

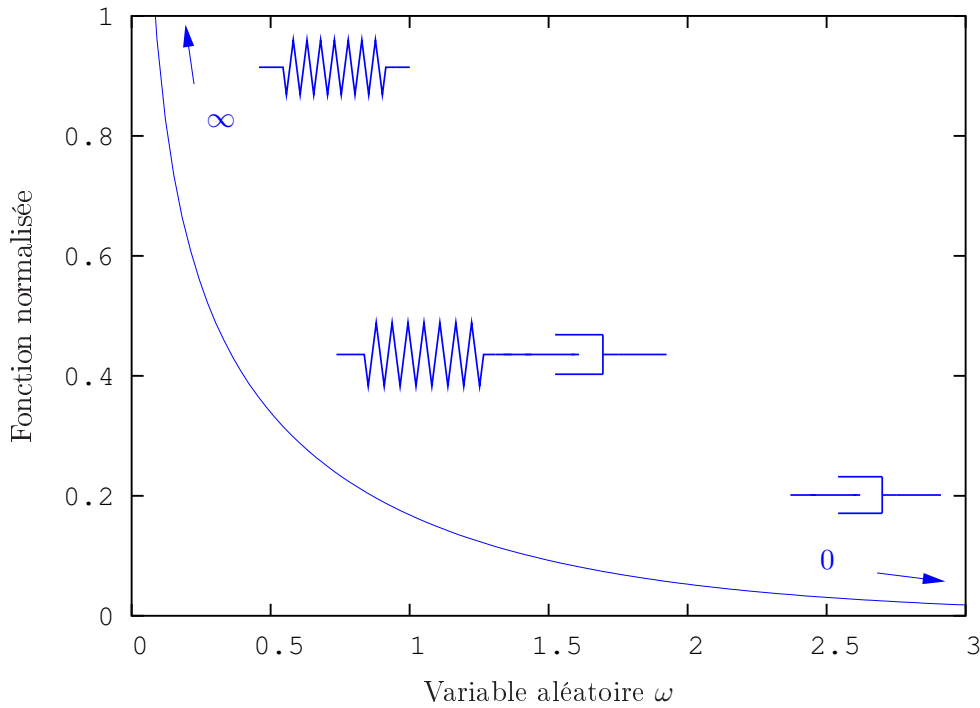


FIGURE VI.4 – Représentation schématique des évolutions de  $\tau(\omega)$  suivant la variable aléatoire  $\omega$

La forme de ces fonctions permet alors une représentation du modèle SHV en fonction de la variable aléatoire  $\omega$  ( $\forall \omega \geq 0$ ) en tenant compte des cas extrêmes suivants :

- lorsque  $\omega = 0$ , on est en présence d'un élément unique de type ressort de raideur  $G_0$ ,
- lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , on a un élément unique de type amortisseur de viscosité  $\eta_\infty$ .

Il nous reste enfin à déterminer la forme de la fonction de pondération  $P(\omega)$ . Notre choix s'est porté sur une loi de probabilité de type gaussienne centrée en  $\omega_0$  et de déviation standard  $\Omega$  telle que :

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{P}_0} \exp \left[ - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \right)^2 \right] \quad \forall \omega \geq 0 \text{ avec } \mathcal{P}_0 = \int_0^\infty \exp \left[ - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \right)^2 \right] d\omega. \quad (\text{VI.14})$$

On fixe alors  $\omega_0 = 0$  permettant ainsi de favoriser la réponse instantanée *i.e.* la représentation du modèle statistique hyper-viscoélastique par un élément de type ressort (*cf.* FIG. VI.5).

Le choix de ces fonctions nous impose alors l'identification de **4** paramètres matériaux :

- **3** déterministes  $C_1$ ,  $G_0$  et  $\eta_\infty$ ,
- **1** statistique  $\Omega$ .

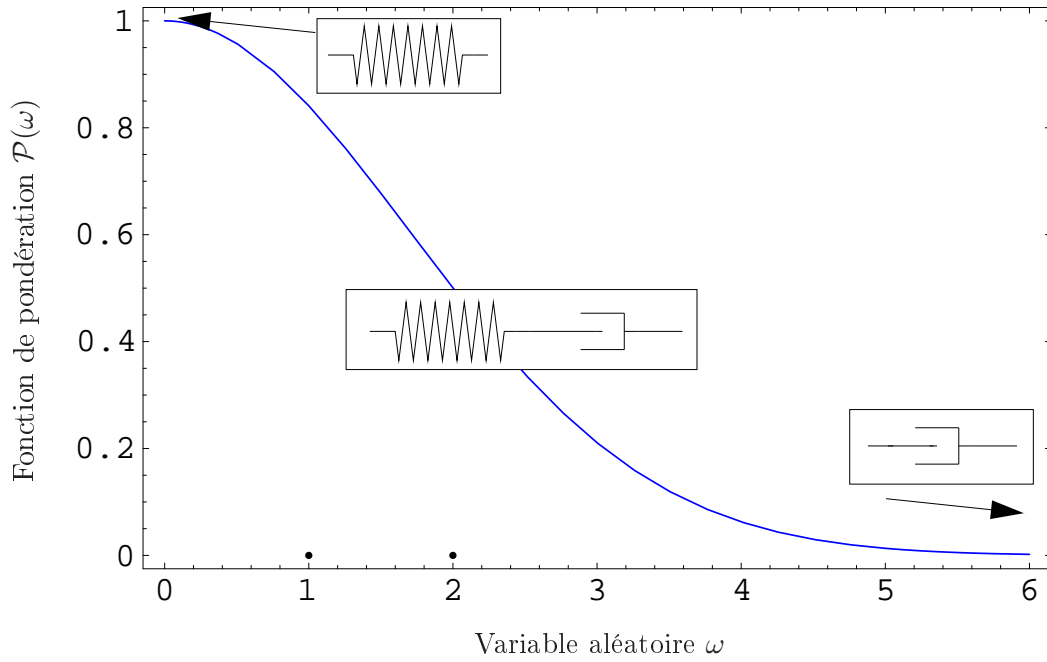


FIGURE VI.5 – Observation schématique de la fonctionnelle de pondération  $\mathcal{P}(\omega)$  suivant la variable aléatoire  $\omega$ .



### VI.1.2 Résultats d'identification

La méthode d'identification que nous utilisons ici est celle développée au paragraphe V.4.1. Nous appliquons donc l'algorithme de minimisation (*cf.* FIG. V.15) simultanément sur deux essais cycliques triangulaires à amplitude progressive pour des vitesses de déformation différentes ( $3s^{-1}$  et  $10s^{-1}$ ). Ces essais sont présentés au paragraphe III.5.3. La FIGURE III.27 propose une représentation schématique de ce type d'essais sachant que nous considérerons seulement deux déformations maximales *i.e.*  $\gamma_{max_1} = 12.5\%$  et  $\gamma_{max_2} = 25\%$ .

Sur le TABLEAU VI.1, on propose les paramètres identifiés et les erreurs relatives obtenues pour les deux essais. La moyenne des erreurs est alors de  $13.75 \pm 2.71\%$ .

La FIGURE VI.6 illustre une confrontation modèle/expérience des résultats d'identification en terme d'hystérésis. L'observation qualitative d'une telle confrontation à l'état stabilisé pour les couples de paramètres de sollicitation  $(12.5\%, 3s^{-1})$ ,  $(25\%, 3s^{-1})$ ,  $(12.5\%, 10s^{-1})$  et  $(25\%, 10s^{-1})$  montre alors une bonne corrélation avec l'expérience (*cf.* FIG. VI.7).

Le modèle semble donc permettre de couvrir un domaine de vitesses de déformation allant jusqu'à  $10s^{-1}$ .

Concernant l'influence de la fréquence sur la réponse du modèle SHV ainsi identifié, on propose d'observer la sensibilité du module dynamique et de la dissipation globale sur un domaine allant

$C_1$ (MPa)	$G_0$ (MPa)	$\eta_\infty$ (MPa.s)	$\Omega$	$\dot{\gamma}$ de l'essai ( $s^{-1}$ )	Erreur (%)
C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	3	16.46
				10	11.03

TABLEAU VI.1 – Résultats d'identification du modèle SHV réalisée simultanément sur deux essais cycliques triangulaires à amplitude progressive (12.5% et 25%) avec des vitesses de déformation différentes ( $3s^{-1}$  et  $10s^{-1}$ ).

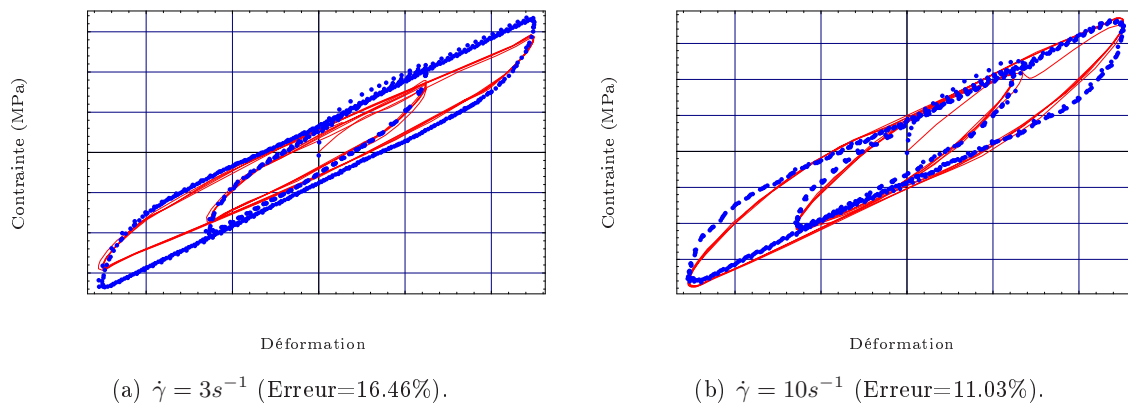


FIGURE VI.6 – Confrontation modèle SHV/expérience de boucles d'hystérésis issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d'identification.

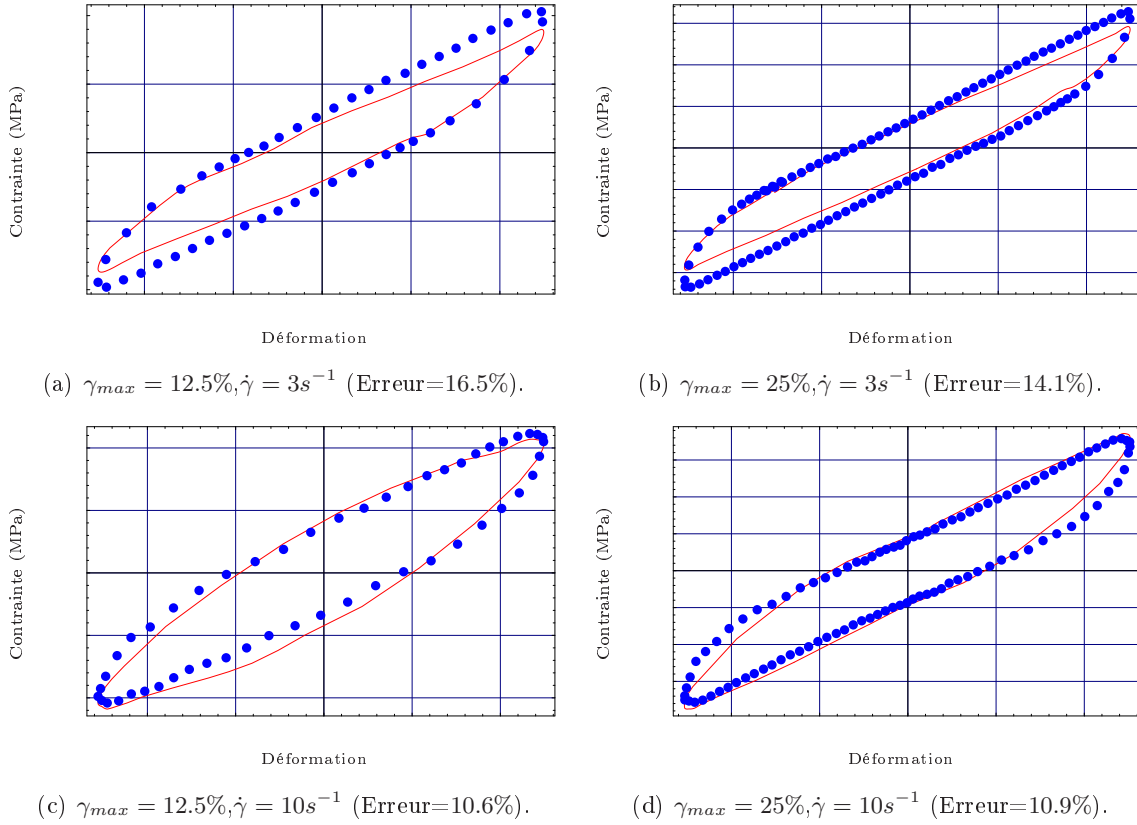


FIGURE VI.7 – Confrontation modèle SHV/expérience des boucles d’hystérésis à l’état stabilisé issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d’identification.

jusqu’à 20Hz. On va déterminer ces grandeurs caractéristiques<sup>(2)</sup> via une sollicitation sinusoïdale à amplitude constante  $\gamma_d = 25\%$ . Une confrontation avec les résultats expérimentaux à différentes fréquences nous confirme alors que ces grandeurs ont des évolutions proches de celles observées expérimentalement (*cf.* FIG. VI.8(a) et FIG. VI.8(b)).

Une autre confrontation a ensuite été réalisée en faisant varier l’amplitude dynamique pour une sollicitation sinusoïdale à fréquence donnée telle que  $f_r = 3\text{Hz}$ . La FIGURE VI.8(d) montre alors une bonne corrélation avec l’expérience de l’évolution de la dissipation globale. Cependant, on constate sur la FIGURE VI.8(c) que le module dynamique, obtenu par le modèle, est indépendant de l’amplitude dynamique. Le modèle SHV ainsi identifié ne reflète donc pas l’assouplissement observé expérimentalement (*cf.* § VI.1.1.d).

Ainsi, le modèle SHV identifié sur des essais cycliques triangulaires à amplitude progressive ne permet pas de rendre compte de ce phénomène.

(2). Une présentation de ces grandeurs, caractéristiques d’un comportement dissipatif, est disponible FIGURE V.10.

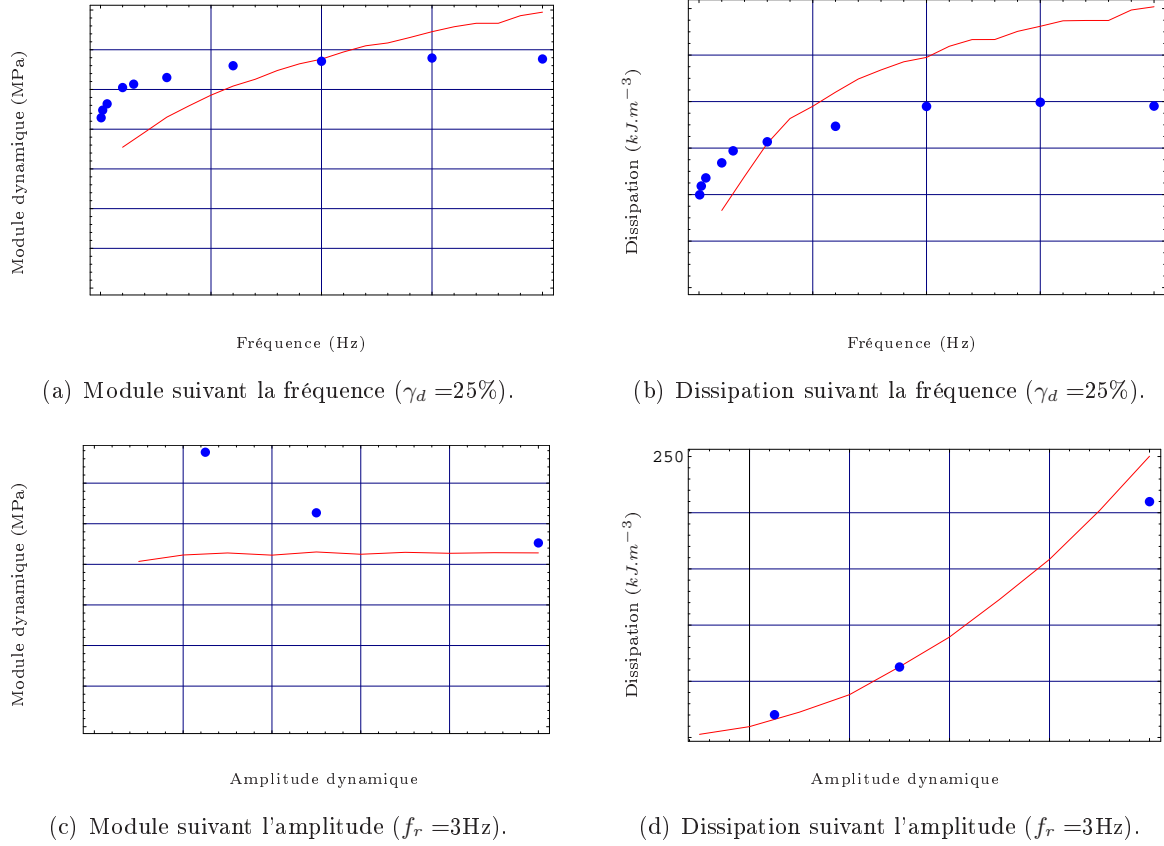


FIGURE VI.8 – Confrontation modèle SHV/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude dynamique pour une sollicitation cyclique sinusoïdale.

## VI.2 Prise en compte de la plasticité

On peut trouver dans la littérature plusieurs orientations pour répondre au phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude dynamique. Les auteurs BRACKBILL *et al.* [2000] ; SJÖBERG [2002] ; CANTOURNET [2002] ; SAAD [2003] proposent par exemple d'enrichir les modèles par un frottement interne non-visqueux ou par un comportement élasto-plastique (*cf.* § V.2.2).

### VI.2.1 Association d'une branche élasto-plastique

Nous proposons ici d'associer un comportement élasto-plastique au modèle SHV généralisé aux grandes déformations. De nombreux auteurs utilisent un couplage des modèles de comportement viscoélastique et élastoplastique généralisé aux grandes déformations [KALISKE et ROTHERT, 1999 ; MIEHE et KECK, 2000 ; HAUPT *et al.*, 2000].

Partant des enseignements qu'on a pu tirer des études effectuées au paragraphe § V.4.2.c, nous avons fait le choix d'associer en parallèle une branche élastoplastique de type SAINT-VENANT

(cf. FIG. VI.9).

Dès lors, on peut écrire l'énergie libre spécifique  $\psi$  et le pseudo-potential de dissipation  $\varphi^{int}$  comme suit :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \int_0^\infty \tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega)) P(\omega) d\omega + \psi_p(\bar{\bar{B}}_{ep}), \\ \varphi^{int} = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\omega, \bar{\bar{D}}_v^o(\omega)) P(\omega) d\omega + \varphi_p(\bar{\bar{D}}_p^o). \end{cases} \quad (\text{VI.15})$$

L'introduction de l'équation VI.15 dans les lois constitutives V.59 énoncées au paragraphe § V.3.1, permet d'écrire le système d'équations qui régit le modèle statistique hyper-visco-plastique noté dans la suite modèle SHVP.

La loi de comportement s'écrit alors telle que :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \int_0^\infty \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega + \bar{\sigma}_p - p\bar{1} \quad (\text{VI.16})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{\sigma}_0 = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi_0(\bar{\bar{B}})}{\partial \bar{\bar{B}}} \right]^D, \\ \tilde{\bar{\sigma}}(\omega) = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}}_e(\omega) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega))}{\partial \bar{\bar{B}}_e(\omega)} \right]^D, \\ \bar{\sigma}_p = 2\rho \left[ \bar{\bar{B}}_{ep} \cdot \frac{\partial \psi_p(\bar{\bar{B}}_{ep})}{\partial \bar{\bar{B}}_{ep}} \right]^D, \end{cases} \quad (\text{VI.17})$$

et les lois complémentaires sont les suivantes :

$$2\rho \left[ \bar{\bar{V}}_e(\omega) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}(\omega, \bar{\bar{B}}_e(\omega))}{\partial \bar{\bar{B}}_e(\omega)} \cdot \bar{\bar{V}}_e(\omega) \right]^D = \frac{\partial \tilde{\varphi}(\omega, \bar{\bar{D}}_v^o(\omega))}{\partial \bar{\bar{D}}_v^o(\omega)} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{D}}_p^o = \frac{\partial \varphi_p^*(\bar{\sigma}_p)}{\partial \bar{\sigma}_p}. \quad (\text{VI.18})$$

Les formes des potentiels  $\psi_0$ ,  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\varphi}$  demeurent identiques à celles introduites au paragraphe précédent. Il reste donc à préciser les potentiels associés à la branche élastoplastique :

- Comme pour  $\psi_0$  et  $\tilde{\psi}$ , on fait le choix d'un modèle hyperélastique néohookéen incompress-

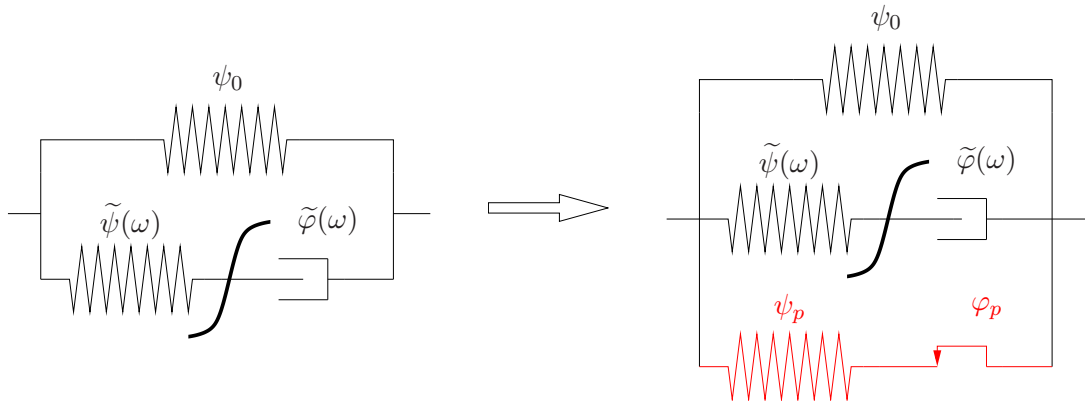


FIGURE VI.9 – Association en parallèle d'une branche élastoplastique de SAINT-VENANT au modèle statistique hyper-viscoélastique

sible tel que :

$$\psi_p = A_p(I_1^{e_p} - 3), \quad (\text{VI.19})$$

où  $A_p$  est un paramètre constant positif.

- de manière analogue au paragraphe V.3.3, le pseudo-potentiel de dissipation plastique  $\varphi_p$  est donné par sa transformée de LEGENDRE-FENCHEL avec une surface seuil de type VON-MISES tel que :

$$\varphi_p^*(\bar{\bar{\sigma}}_p) = \frac{1}{2\tilde{\eta}} \langle \|\bar{\bar{\sigma}}_p\| - \chi \rangle^2, \quad (\text{VI.20})$$

où  $\chi$  est un paramètre constant positif et  $\tilde{\eta}$  une viscosité artificielle fixée très faible permettant ainsi de régulariser l'algorithme de détermination de  $\bar{\bar{D}}_p^o$ .

Les équations qui régissent le modèle SHVP s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_0 + \int_0^\infty \tilde{\bar{\bar{\sigma}}}(\omega) \mathcal{P}(\omega) d\omega + \bar{\bar{\sigma}}_p - p\bar{\bar{1}} \\ \bar{\bar{\sigma}}_0 = 2\rho \left[ C_1 \bar{\bar{B}} \right]^D, \\ \tilde{\bar{\bar{\sigma}}}(\omega) = 2\rho \left[ G(\omega) \bar{\bar{B}}_e(\omega) \right]^D, \\ \bar{\bar{\sigma}}_p = 2\rho \left[ A_p \bar{\bar{B}}_{e_p} \right]^D, \\ 2\rho \left[ G(\omega) \bar{\bar{B}}_e(\omega) \right]^D = \eta(\omega) \bar{\bar{D}}_v^o(\omega), \\ \bar{\bar{D}}_p^o = \frac{1}{\tilde{\eta}} \langle \|\bar{\bar{\sigma}}_p\| - \chi \rangle \frac{\bar{\bar{\sigma}}_p}{\|\bar{\bar{\sigma}}_p\|}. \end{cases} \quad (\text{VI.21})$$

On a alors **6** paramètres matériaux à identifier :

- **5** déterministes,  $C_1$ ,  $G_0$ ,  $\eta_\infty$ ,  $A_p$  et  $\chi$ ,
- **1** statistique,  $\Omega$ .

## VI.2.2 Elaboration d'une stratégie d'identification

L'enrichissement du modèle SHV par un comportement de type élastoplastique nécessite l'élaboration d'une stratégie d'identification des paramètres. En effet, il est important de distinguer la proportion du comportement dissipatif due à la plasticité de celle traduite par viscosité.

En régime (quasi)statique, le phénomène de dissipation n'est issu que d'un frottement interne non-visqueux *i.e.* un comportement élastoplastique. Dans ces conditions, le modèle SHVP n'est alors représenté que par ses branches hyperélastique principale et hyper-élastoplastique. Il est alors assimilable à un modèle hyper-élastoplastique à écrouissage isotrope.

On propose alors d'identifier préalablement  $C_1$ ,  $A_p$  et  $\chi$  sur un essai de montée en charge quasi-statique et ensuite de réaliser un ajustement sur l'élasticité différée obtenue par des essais de relaxation.

Les paramètres  $G_0$ ,  $\eta_\infty$  et  $\Omega$  sont ensuite identifiés via le même protocole que celui exposé au paragraphe VI.1.2, mais appliqué cette fois sur le modèle SHVP en fixant  $C_1$ ,  $A_p$  et  $\chi$ .

### VI.2.3 Résultats d'identification

Nous appliquons la stratégie d'identification présentée précédemment en utilisant des essais de double cisaillement réalisés à température ambiante.

Lors de la première étape, nous avons réalisé une pré-identification des paramètres du modèle hyper-élastoplastique écrouissable sur un essai de montée en charge quasi-statique tel que  $\dot{\gamma} = 0.03s^{-1}$  et  $\gamma_{max} = 50\%$ . A la vue de la FIGURE VI.10, on constate que le modèle ainsi identifié présente une excellente corrélation avec l'expérience (l'erreur relative est de 2.5%). Le TABLEAU VI.2 propose les résultats d'identification des paramètres.

L'étape intermédiaire permet ensuite d'ajuster les paramètres ainsi identifiés sur l'élasticité différée obtenue en réalisant des essais de relaxation pour trois niveaux de déformation 12.5%, 25% et 50% (*cf.* FIG. VI.11). Le TABLEAU VI.2 présente les paramètres ainsi obtenus qui seront fixés pour la dernière étape.

La dernière étape intervient dans la détermination des paramètres statistiques hyper-visco-élastiques. La FIGURE VI.12 illustre les résultats d'identification et le jeu de paramètres identifiés au terme de cette étape est disponible via le TABLEAU VI.2.

D'un point de vue quantitatif, l'enrichissement du modèle statistique par une branche hyper-élastoplastique permet une meilleure corrélation avec l'expérience (*cf.* TAB. VI.3). La moyenne

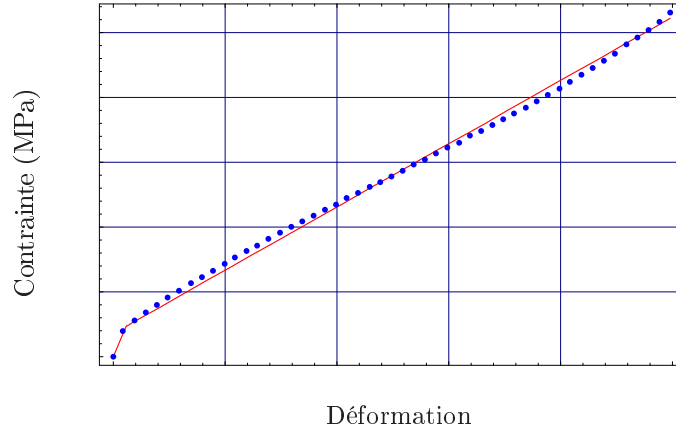


FIGURE VI.10 – *Pré-identification des paramètres du modèle hyper-élastoplastique écrouissable sur un essai de montée en charge quasi-statique (Erreur = 2.5%).*

Etape	$C_1$ (MPa)	$A_p$ (MPa)	$\chi$ (Mpa)	$G_0$ (Mpa)	$\eta_\infty$ (MPa.s)	$\Omega$
Initiale	C.E.	C.E.	C.E.	×	×	×
Intermédiaire	C.E.	C.E.	C.E.	×	×	×
Finale	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU VI.2 – *Paramètres du modèle statistique hyper-visco-plastique identifiés aux différentes étapes de la stratégie d'identification.*

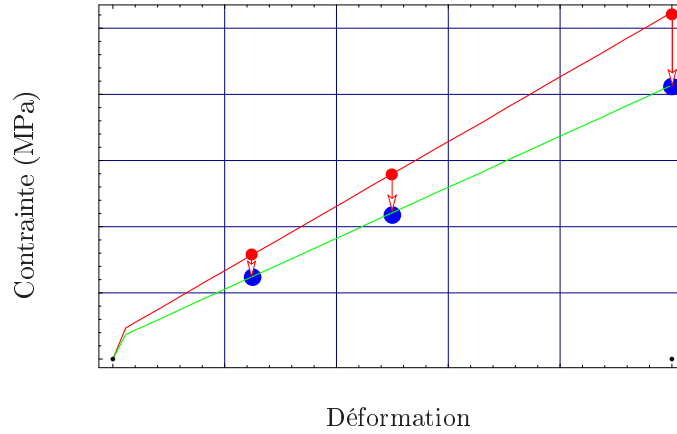


FIGURE VI.11 – Ajustement des paramètres du modèle hyper-élastoplastique sur l'élasticité différée (points bleus) obtenue avec trois essais de relaxation d'échelons de déformation de 12.5%, 25% et 50%.

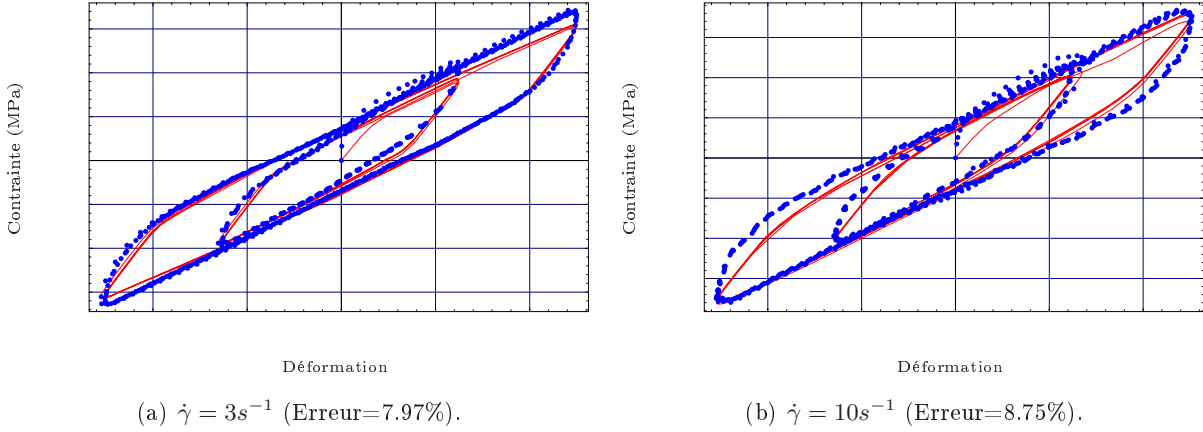


FIGURE VI.12 – Confrontation modèle SHVP/expérience des boucles d'hystérésis issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d'identification.

$\dot{\gamma}$ de l'essai ( $s^{-1}$ )	Erreur (%)
3	7.97
10	8.75

TABLEAU VI.3 – Erreurs relatives obtenues lors de l'étape d'identification finale.

des erreurs relatives étant de  $8.36 \pm 0.39\%$ , elle se situe bien en dessous de celle obtenue avec le modèle SHV.

Qualitativement, l'observation d'une confrontation du modèle SHVP face à l'expérience des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour les couples de paramètres de sollicitation  $(12.5\%, 3s^{-1})$ ,  $(25\%, 3s^{-1})$ ,  $(12.5\%, 10s^{-1})$  et  $(25\%, 10s^{-1})$  confirme les bons résultats d'identification (cf. FIG. VI.13). L'enrichissement du modèle SHV par une branche hyper-élastoplastique permet

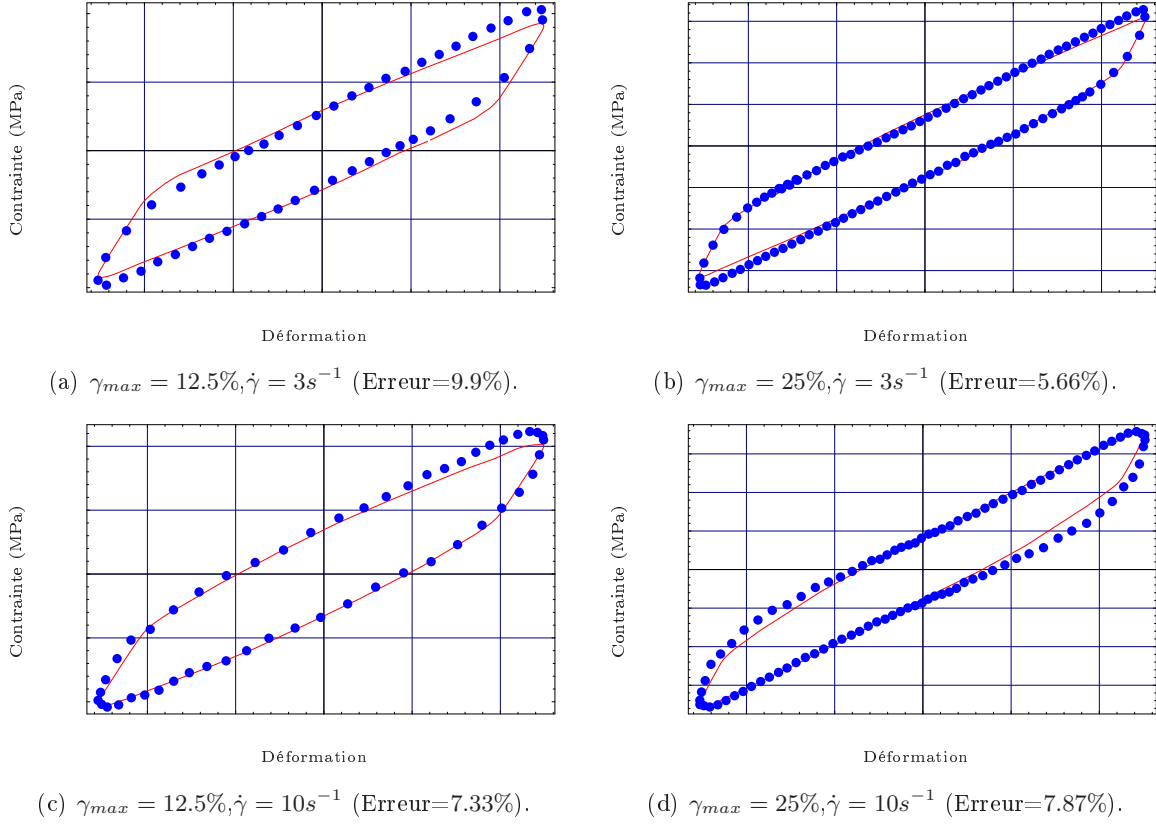


FIGURE VI.13 – Confrontation modèle SHVP/expérience des boucles d’hystérésis à l’état stabilisé issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d’identification.

donc une corrélation plus fine avec l’expérience.

Via la confrontation du modèle SHVP vis à vis de l’expérience, les FIGURES VI.14(a) et VI.14(b) illustrent l’évolution du module de rigidité et de la dissipation suivant la fréquence calculés pour une sollicitation sinusoïdale telle que  $\gamma_d = 25\%$ . Ainsi, les évolutions de la raideur et de la dissipation globale sont sensiblement plus proches de l’expérience que celles obtenues par le modèle SHV ainsi que par le modèle de MAXWELL généralisé présenté au paragraphe V.4.2.c. De plus, la FIGURE VI.14(c) montre que le modèle traduit le phénomène d’assouplissement suivant l’amplitude dynamique.

Le modèle SHVP ainsi identifié semble donc permettre de traduire correctement l’influence de la vitesse de sollicitation et de l’amplitude de chargement sur la réponse du matériau pour des chargements cycliques sinusoïdaux.



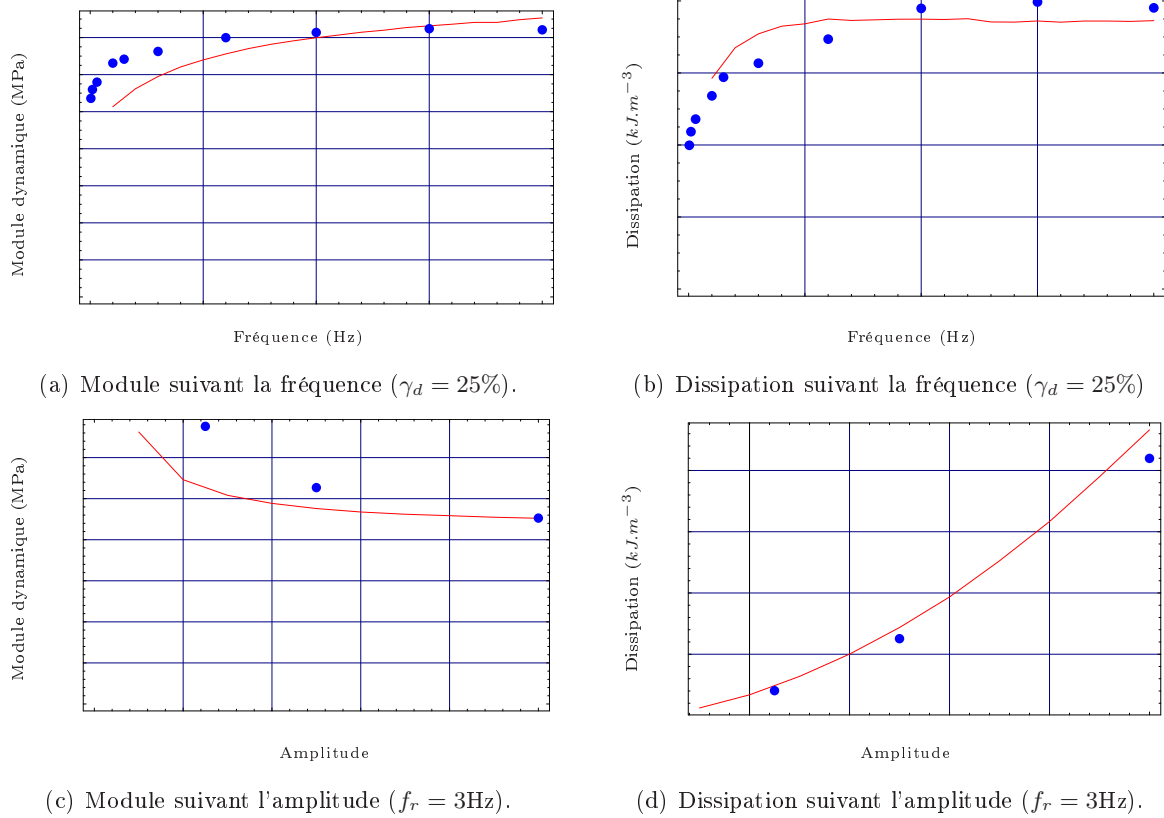


FIGURE VI.14 – Confrontation modèle SHVP/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude pour une sollicitation cyclique sinusoïdale.

## VI.3 Confrontation modèles/expériences

Les 6 paramètres du modèle SHVP étant identifiés à partir d'essais cycliques triangulaires, nous proposons maintenant une validation via une confrontation du modèle face à l'expérience pour des sollicitations combinées telles que :

- sollicitations cycliques sinusoïdales à  $N$  harmoniques,

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_{d_i} \sin(i2\pi f_r t),$$

- sollicitations cycliques sinusoïdales avec pré-déformation,

$$\gamma(t) = \gamma_s + \gamma_d \sin(2\pi f_r t).$$

### VI.3.1 Sollicitations cycliques sinusoïdales

Ici, nous utilisons des essais cycliques sinusoïdaux à amplitude dynamique donnée telle que  $\gamma_d = 25\%$  :

$$\gamma(t) = \gamma_d \sin(2\pi f_r t) \quad (\text{VI.22})$$

Le TABLEAU VI.4 présente les écarts relatifs associés à chaque fréquence d'essais. L'écart moyen de  $11.1 \pm 1.26$  est alors bien en dessous de celui obtenu lors de l'identification du modèle de MAXWELL généralisé sur ces mêmes essais.

$f_r$ (Hz)	Ecart (%)
3	13.36
6	10.93
10	9.03
15	10.20
20	11.98

TABLEAU VI.4 – *Écarts relatifs obtenus pour des sollicitations cycliques sinusoïdales avec  $\gamma_d = 25\%$  à l'état stabilisé.*

La FIGURE VI.15 illustre une confrontation du modèle SHVP vis à vis de l'expérience en terme de boucles d'hystérésis à l'état stabilisé. Qualitativement, on constate alors que le modèle permet de refléter la présence d'un point anguleux aux amplitudes extrêmes de la sollicitation. Par contre, il ne représente pas l'étranglement de l'hystérésis au passage à l'origine des déformations.

Malgré cela, on peut considérer que le modèle SHVP corrèle convenablement les essais sinusoïdaux pour des fréquences allant jusqu'à 20Hz.

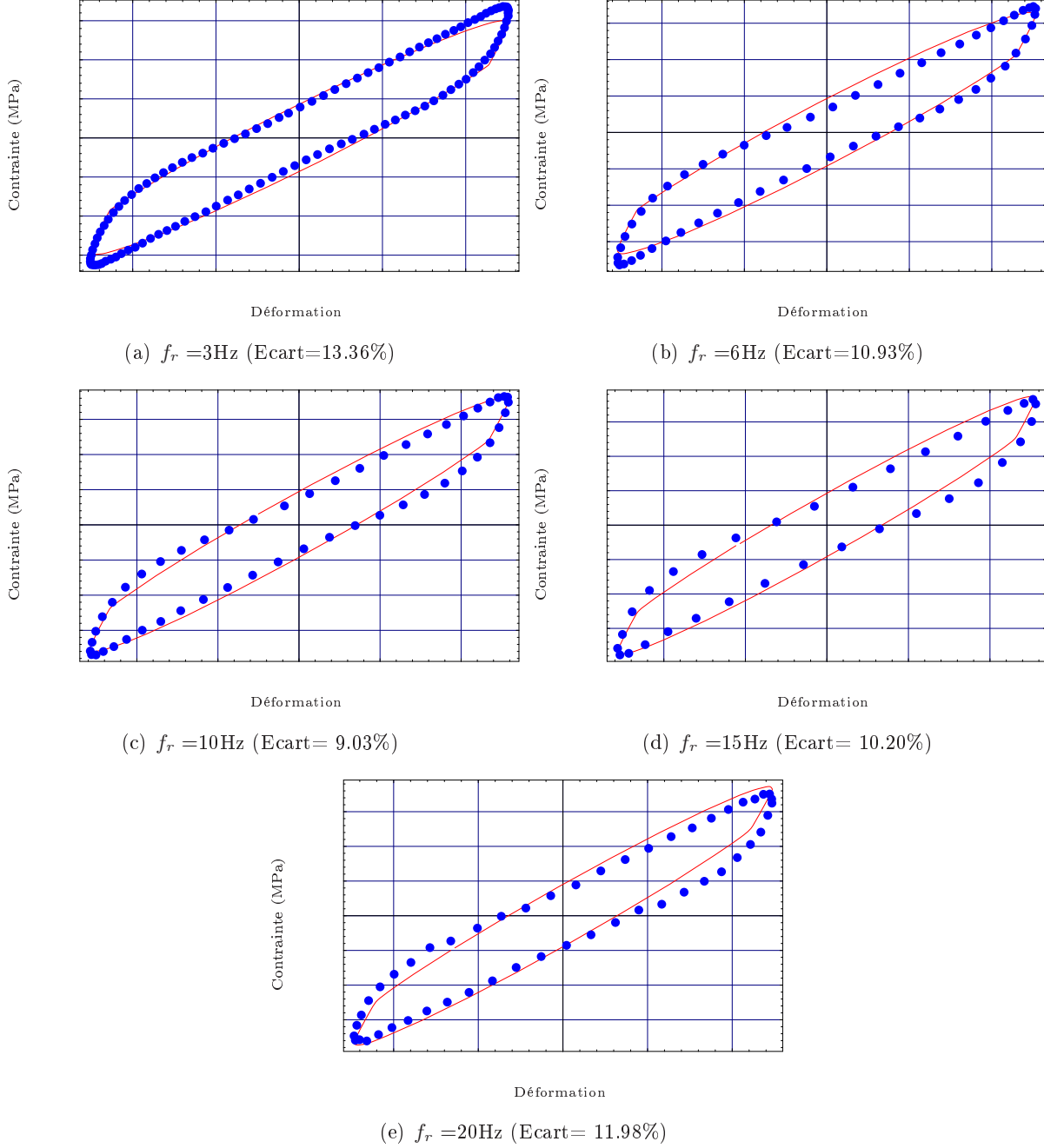


FIGURE VI.15 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour des sollicitations cycliques sinusoïdales à amplitude dynamique donnée ( $\gamma_d = 25\%$ ) pour différentes fréquences (de 3Hz à 20Hz).

### VI.3.2 Sollicitations sinusoïdales à deux harmoniques

Les sollicitations que nous utilisons ici sont de type sinusoïdale à deux harmoniques :

$$\gamma(t) = \gamma_{d_1} \sin(2\pi f_{r_1} t) + \gamma_{d_2} \sin(2\pi f_{r_2} t). \quad (\text{VI.23})$$

Nous observons les réponses proposées par le modèle à ce type de chargement lors d'un cycle stabilisé pour les combinaisons de deux harmoniques suivantes :

- $f_{r_1} = 1.5\text{Hz}$  et  $f_{r_2} = 2f_{r_1} = 3\text{Hz}$  (cf. FIG. VI.16, FIG. VI.17, FIG. VI.18 et FIG. VI.19),
- $f_{r_1} = 1.5\text{Hz}$  et  $f_{r_2} = 3f_{r_1} = 4.5\text{Hz}$  (cf. FIG. VI.20, FIG. VI.21, FIG. VI.22 et FIG. VI.23).

Le TABLEAU VI.5 présente les écarts relatifs obtenus entre le modèle et les essais expérimentaux. Au regard des résultats, on constate donc la capacité du modèle à rendre compte de sollicitations sinusoïdales à deux harmoniques.

$\gamma_{d_1}$ (%)	$f_{r_1}$ (Hz)	$\gamma_{d_2}$ (%)	$f_{r_2}$ (Hz)	Ecart (%)
5	1.5	25	3	7.41
12.5	1.5	12.5	3	9.04
12.5	1.5	25	3	5.98
25	1.5	25	3	9.74
5	1.5	25	4.5	7.64
12.5	1.5	12.5	4.5	7.8
12.5	1.5	25	4.5	7.94
25	1.5	12.5	4.5	6.94

TABLEAU VI.5 – *Écarts relatifs obtenus pour des sollicitations sinusoïdales à 2 harmoniques.*

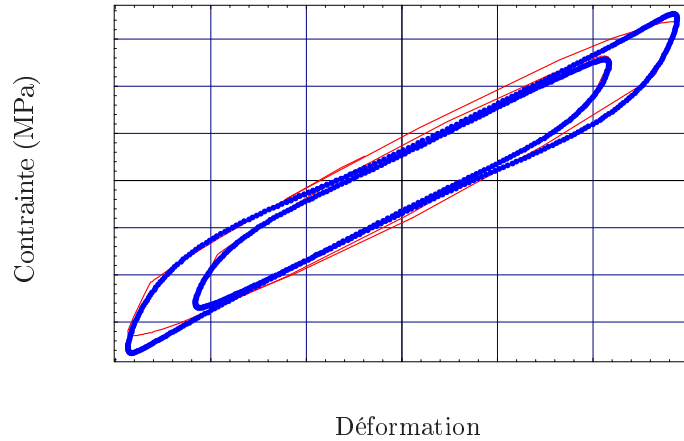


FIGURE VI.16 – *Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.05 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$  (Ecart=7.41%).*

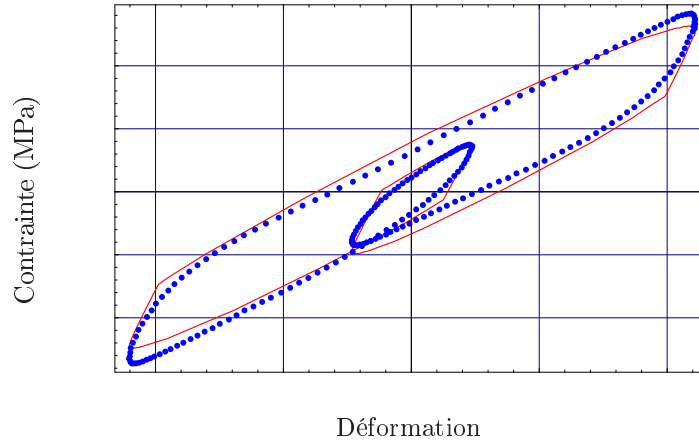


FIGURE VI.17 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 3t)$  ( $Ecart=9.04\%$ ).

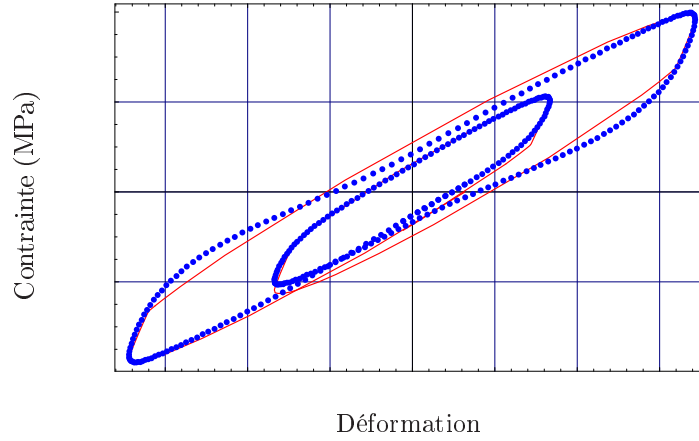


FIGURE VI.18 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$  ( $Ecart=5.98\%$ ).

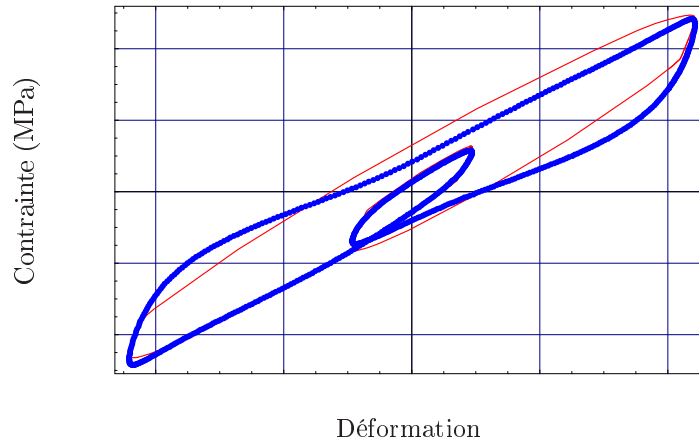


FIGURE VI.19 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$  ( $Ecart=9.74\%$ ).

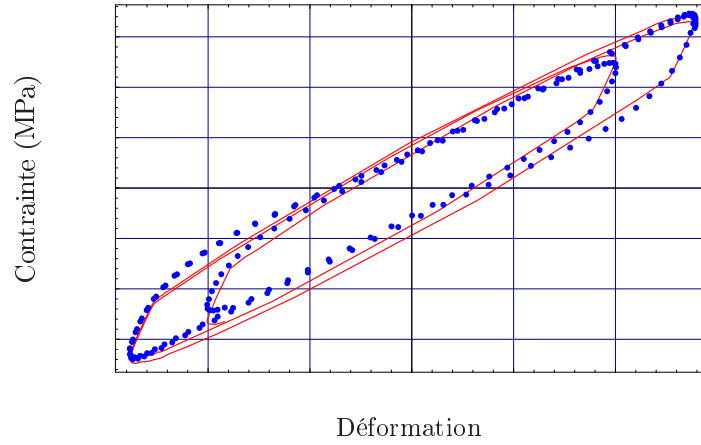


FIGURE VI.20 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.05 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 4.5t)$  (Ecart=7.64%).

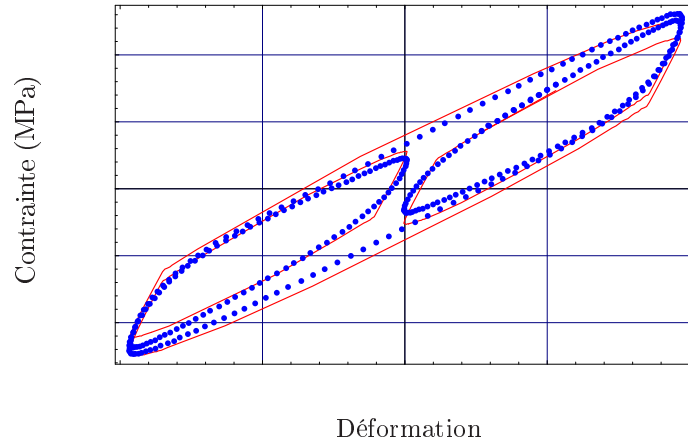


FIGURE VI.21 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 4.5t)$  (Ecart=7.8%).

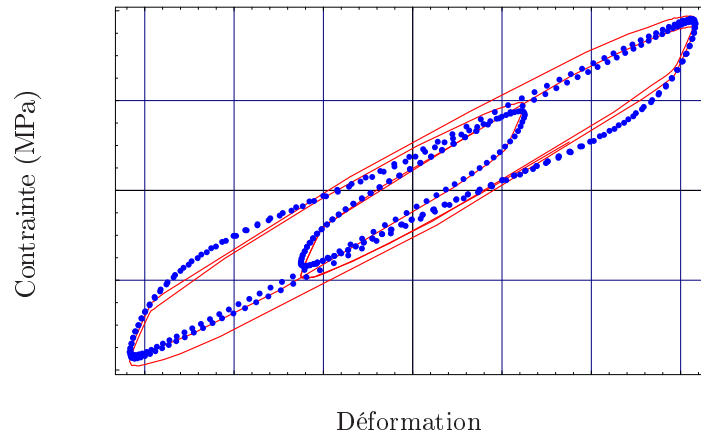


FIGURE VI.22 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 4.5t)$  (Ecart=7.94%).

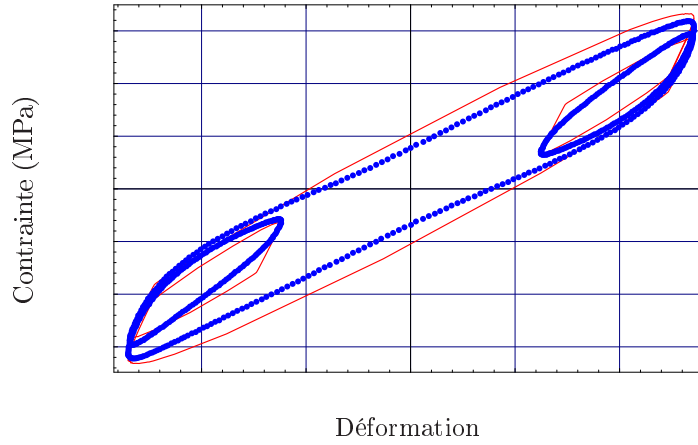


FIGURE VI.23 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 4.5t)$  (Ecart=6.94%).

### VI.3.3 Sollicitations sinusoïdales à trois harmoniques

Les sollicitations sinusoïdales à trois harmoniques s'écrivent comme suit :

$$\gamma(t) = \gamma_{d_1} \sin(2\pi f_{r_1} t) + \gamma_{d_2} \sin(2\pi f_{r_2} t) + \gamma_{d_3} \sin(2\pi f_{r_3} t). \quad (\text{VI.24})$$

Nous observons sur la FIGURE VI.24, une confrontation modèle SHVP/expérience pour ce type de chargement avec une combinaison de trois harmoniques telle que *i.e.*  $f_{r_1} = 1.5\text{Hz}$ ,  $f_{r_2} = 2f_{r_1} = 3\text{Hz}$  et  $f_{r_3} = 3f_{r_1} = 4.5\text{Hz}$ . L'écart relatif obtenu est de l'ordre de 11.23%. On peut donc considérer que le modèle est relativement capable de refléter ce type de chargement.

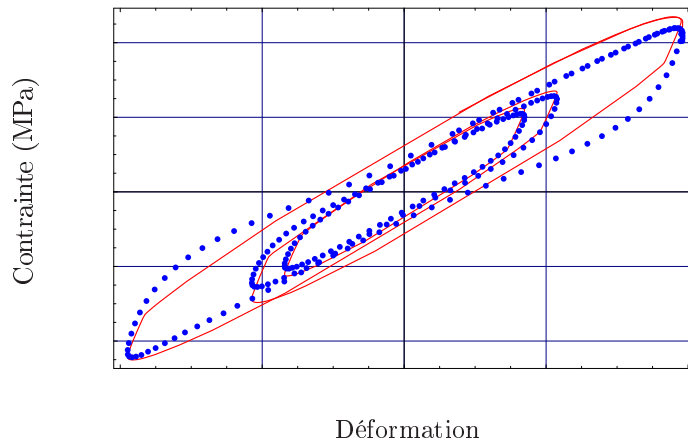


FIGURE VI.24 – Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 3 harmoniques telle que  $\gamma(t) = 0.05 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 3t) + 0.25 \sin(2\pi 4.5t)$  (Ecart=11.23%).

### VI.3.4 Sollicitations cycliques sinusoïdales avec pré-déformation

Les sollicitations sinusoïdales avec pré-déformation s'écrivent comme suit :

$$\gamma(t) = \gamma_s + \gamma_d \sin(2\pi f_r t) \quad (\text{VI.25})$$

Le TABLEAU VI.25 présente les écarts relatifs obtenus en réponse à ce type de sollicitation.

$\gamma_s$ (%)	$\gamma_d$ (%)	Ecart (%)	$\gamma_s$ (%)	$\gamma_d$ (%)	Ecart (%)
12.5	5	25.7	25	5	14.62
12.5	12.5	15.26	25	12.5	12.25
12.5	25	13.57	25	25	13.55

TABLEAU VI.6 – *Écarts relatifs obtenues pour des sollicitations cycliques sinusoïdales avec pré-déformation tel que  $\gamma(t) = \gamma_s + \gamma_d \sin(2\pi 3t)$*

Les FIGURES VI.25(a) et VI.25(b) illustrent la réponse du modèle pour ce type de chargement pour des amplitudes statiques de 12.5% et 25% associées à des amplitudes dynamiques de 5%, 12.5% et 25% pour une fréquence donnée de 3Hz.

Qualitativement, malgré l'incapacité de traduire convenablement le phénomène de dissymétrie des boucles d'hystérésis, le modèle représente convenablement la contrainte moyenne lors d'essais cycliques avec pré-déformation.

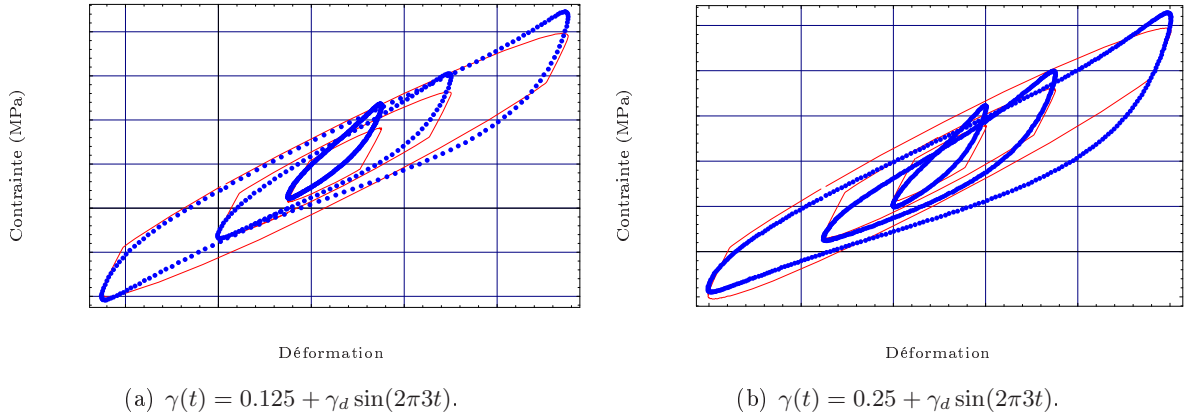


FIGURE VI.25 – *Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation cyclique sinusoïdale avec pré-déformation telle que  $\gamma_d = 0.05, 0.125$  et  $0.25$ .*



## VI.4 Influence des paramètres matériaux

Le comportement traduit par notre modèle est essentiellement régi par les paramètres matériaux qui le caractérisent.

Nous allons tester maintenant la sensibilité des paramètres du modèle en réponse à une sollicitation cyclique sinusoïdale avec une amplitude dynamique  $\gamma_d = 25\%$  et une fréquence  $f_r = 3\text{Hz}$  à travers une observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques, *i.e.* le module dynamique et la dissipation globale.

Nous avons donc fait varier les paramètres dans un domaine allant d'une valeur (quasi-)nulle vers une valeur supérieure à celle identifiée<sup>(3)</sup> pour nous permettre de réaliser les observations suivantes :

### • Influence de $C_1$

L'observation de la FIGURE VI.4 nous montre que :

- le module dynamique croît linéairement suivant  $C_1$ ,
- le paramètre  $C_1$  n'a aucune influence sur la dissipation globale.

Ce paramètre est bien caractéristique d'un comportement hyperélastique non-dissipatif.

### • Influence de $A_p$ et $\chi$

La FIGURE VI.27 illustre l'influence de  $A_p$ . Il ressort alors que :

- le paramètre  $A_p$  n'a aucune influence sur le module dynamique,
- l'évolution de la dissipation est fortement croissante lorsque  $0 < A_p < A_p^{id}$  et elle se stabilise ensuite en suivant une asymptote horizontale.

Concernant l'influence de  $\chi$  (*cf.* FIG. VI.28), nous proposons le constat suivant :

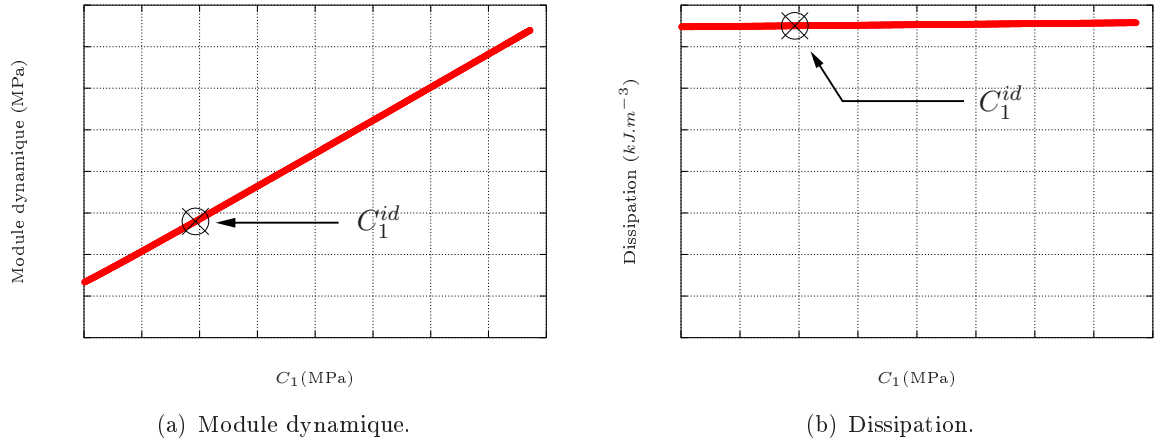
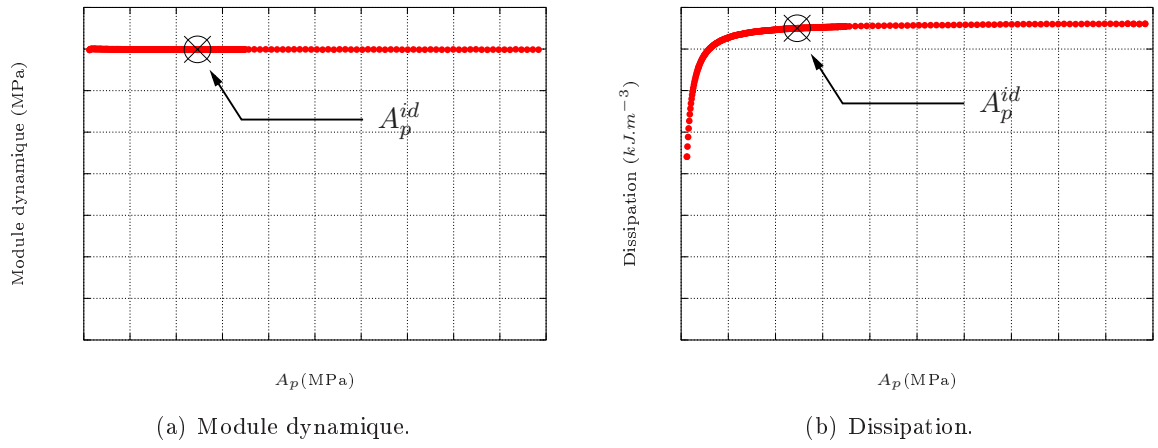
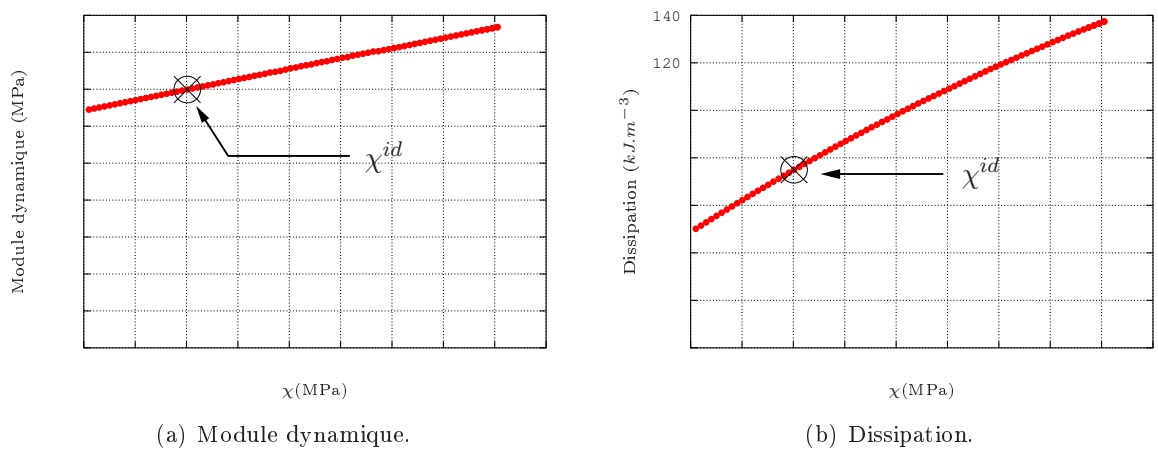
- le module dynamique croît linéairement suivant  $\chi$ ,
- le paramètre  $\chi$  influence fortement la dissipation globale (croissance quasi-linéaire).

Les paramètres  $A_p$  et  $\chi$  sont plus influents sur la dissipation que sur le module dynamique.

Ces évolutions peuvent être expliquées par le fait que la sollicitation imposée nous positionne au dessus du seuil de plasticité (le patin est donc toujours ouvert).

---

(3). Pour distinguer dans la suite un paramètre  $\mathbf{X}$  identifié, nous le noterons  $\mathbf{X}^{id}$ .

FIGURE VI.26 – Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant  $C_1$ .FIGURE VI.27 – Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant  $A_p$ .FIGURE VI.28 – Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant  $\chi$ .

### • Influence de $G_0$ et $\eta_\infty$

On rappelle que la forme de la fonction caractéristique élastique faisant intervenir le paramètre  $G_0$  s'écrit telle que :

$$G(\omega) = G_0 (\dots). \quad (\text{VI.26})$$

Une brève analyse de la FIGURE VI.29 nous renseigne sur l'influence de  $G_0$  :

- le module dynamique évolue suivant  $G_0$  de manière croissante non-linéaire,
- il y existe une forte croissance quasi-linéaire de la dissipation globale suivant  $G_0$ .

On rappelle que le paramètre  $\eta_\infty$  intervient dans la fonction caractéristique visqueuse :

$$\eta(\omega) = \eta_\infty (\dots). \quad (\text{VI.27})$$

La FIGURE VI.30 nous permet d'effectuer les constats suivants pour  $\eta_\infty$  :

- le module dynamique semble croître non-linéairement suivant  $\eta_\infty$  vers une valeur asymptotique,
- la dissipation globale évolue d'une manière non-linéaire suivant  $\eta_\infty$  jusqu'à une valeur maximale pour ensuite diminuer quasi-linéairement.

Les paramètres  $G_0$  et  $\eta_\infty$  sont plus influents sur la dissipation que sur le module dynamique.

Ces deux paramètres sont liés via l'expression du temps caractéristique de relaxation :

$$\tau(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{2G(\omega)} = \dots \quad (\text{VI.28})$$

Ces évolutions peuvent alors être expliquées comme suit :

- lorsque  $\eta_\infty$  tend vers l'infini, le modèle SHV est représenté par un élément de type ressort d'où la stabilisation du module dynamique et la perte de dissipation,

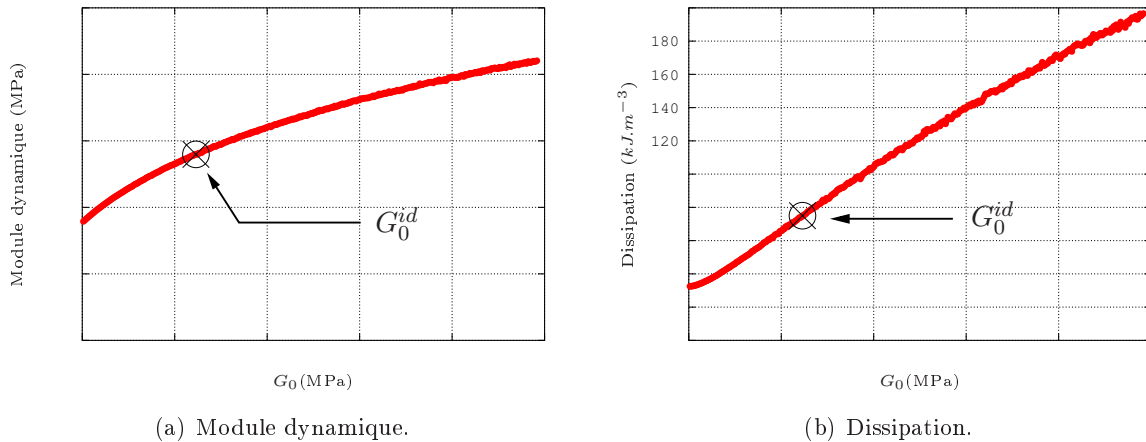
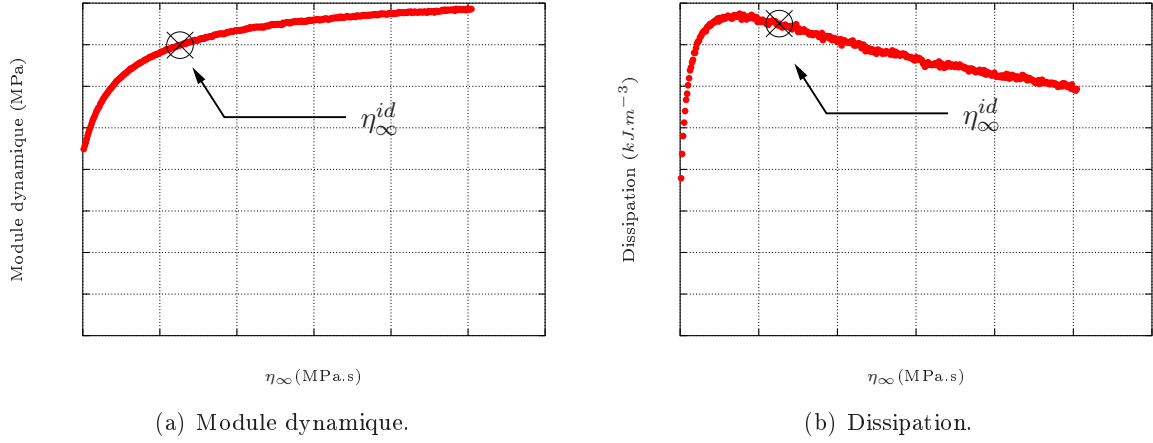


FIGURE VI.29 – Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant  $G_0$ .

FIGURE VI.30 – Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant  $\eta_\infty$ .

- lorsque  $G_0$  tend vers l'infini, le modèle SHV est représenté par un élément de type amortisseur qui explique l'augmentation importante de la dissipation,

#### • Influence de $\omega_0$ et $\Omega$

On rappelle la forme de la fonction de pondération de type gaussienne faisant intervenir son centre  $\omega_0$  et la déviation standard  $\Omega$  :

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{\mathcal{P}_0} \exp \left[ - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \right)^2 \right] \quad \forall \omega \geq 0 \text{ avec } \mathcal{P}_0 = \int_0^\infty \exp \left[ - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \right)^2 \right] d\omega. \quad (\text{VI.29})$$

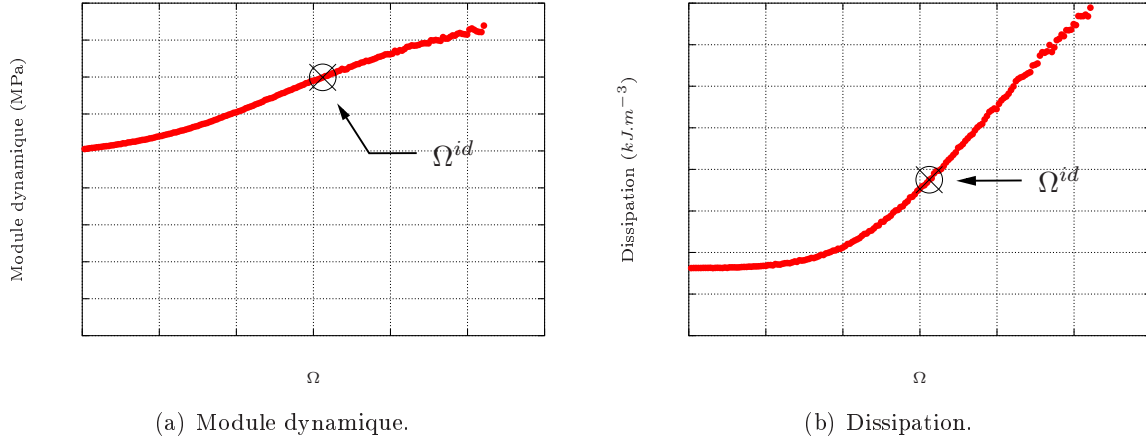
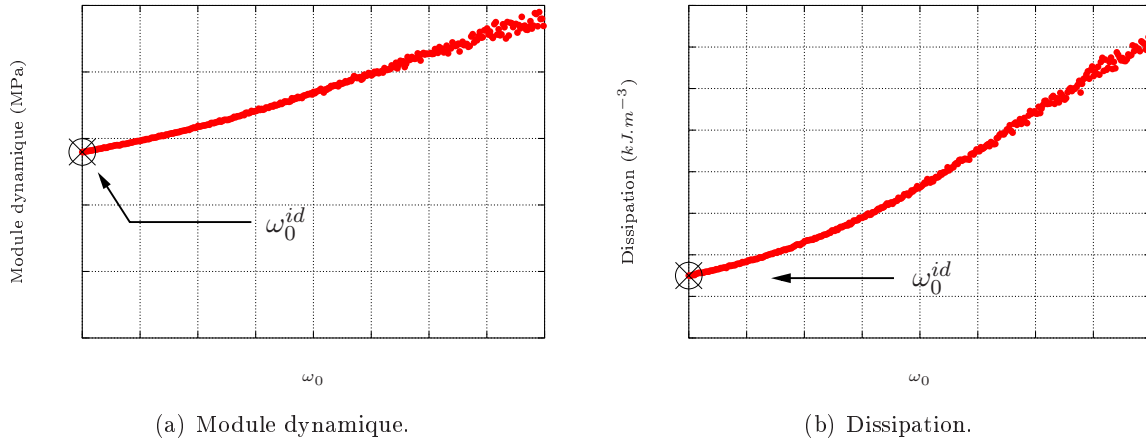
L'observation de la FIGURE VI.31 nous permet de faire les constats suivants :

- Le paramètre  $\Omega$  influence le module dynamique (croissance non-linéaire),
- l'évolution de la dissipation suivant  $\Omega$  exhibe une pente nulle à l'origine pour décrire ensuite une allure croissante fortement non-linéaire.

Concernant l'influence de  $\omega_0$  (cf. FIG. VI.32), il est possible de réaliser les constats suivants :

- le module dynamique croît de manière quasi-linéaire suivant  $\omega_0$ ,
- l'évolution monotone de la dissipation globale suivant  $\omega_0$  a une allure faiblement non-linéaire.

Les paramètres statistiques ont une influence plus prononcée sur la dissipation globale que sur le module dynamique.

FIGURE VI.31 – Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant  $\Omega$ .FIGURE VI.32 – Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant  $\omega_0$ .

## VI.5 Vers une interprétation physique du modèle

Si l'on considère une pièce en élastomère chargé – dans le cas de la FIGURE VI.33 une éprouvette de double cisaillement – le matériau apparaît homogène à l'échelle macroscopique.

Cependant un zoom qui nous ramène à une échelle mésoscopique, permet de distinguer un mélange bi-phasique constitué d'inclusions noyées dans une matrice (*cf.* § I.5).

Enfin via un dernier zoom, nous nous plaçons au niveau d'une inclusion. A cette échelle, LEBLANC [2003] propose un matériau tri-phasé composé :

- de la matrice élastomérique dite extractible,
- des agrégats/agglomérats de charges,
- de l'élastomère lié (interphase), lieu d'interactions fortes entre les inclusions et la matrice et les inclusions elles-mêmes.

Pour la modélisation du comportement du milieu hétérogène, l'hypothèse de VOIGT nous per-

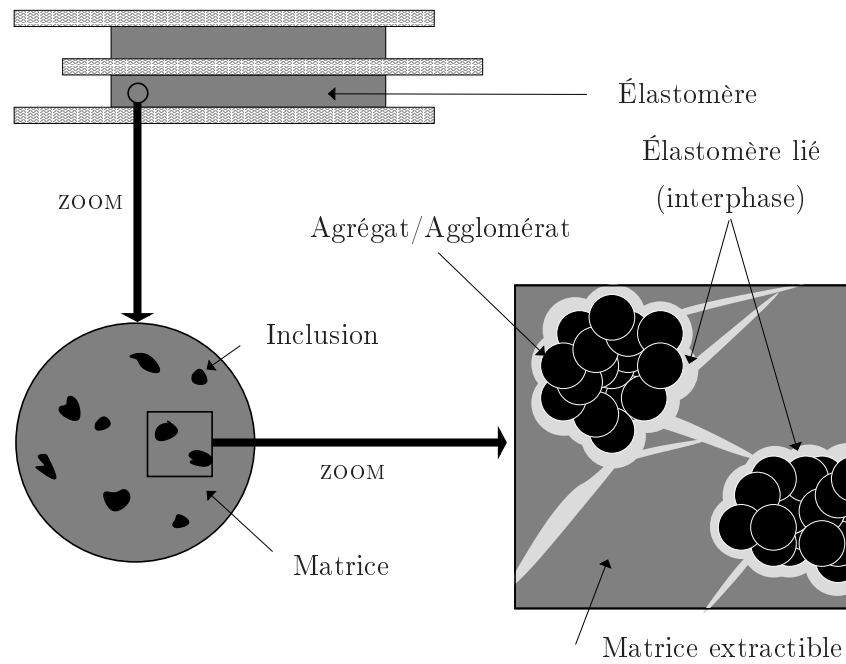


FIGURE VI.33 – Vision "macro-meso" d'un élastomère chargé.

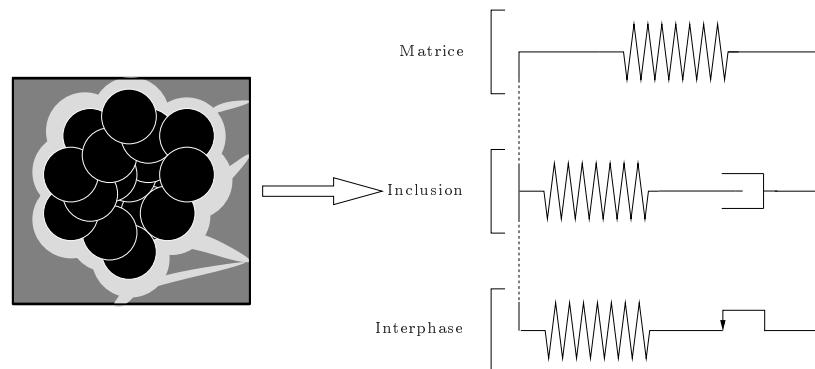


FIGURE VI.34 – Interprétation rhéologique des trois phases en présence.

met de considérer que la déformation est la même pour les trois phases et qui correspond à la déformation macroscopique. De plus en supposant que la matrice est dense et que les inclusions sont faiblement réticulées, cela nous permet d'interpréter physiquement le modèle rhéologique donné FIGURE VI.34 comme suit :

- un comportement hyperélastique pour la matrice, (élément ressort),
- un comportement hyper-viscoélastique pour les inclusions, (modèle viscoélastique de MAXWELL),
- un comportement hyper-élastoplastique pour l'interphase (modèle de SAINT-VENANT),

Ces considérations nous permettent alors d'utiliser un couple composé d'une association en parallèle d'un modèle de MAXWELL et d'un modèle de SAINT-VENANT pour représenter respecti-

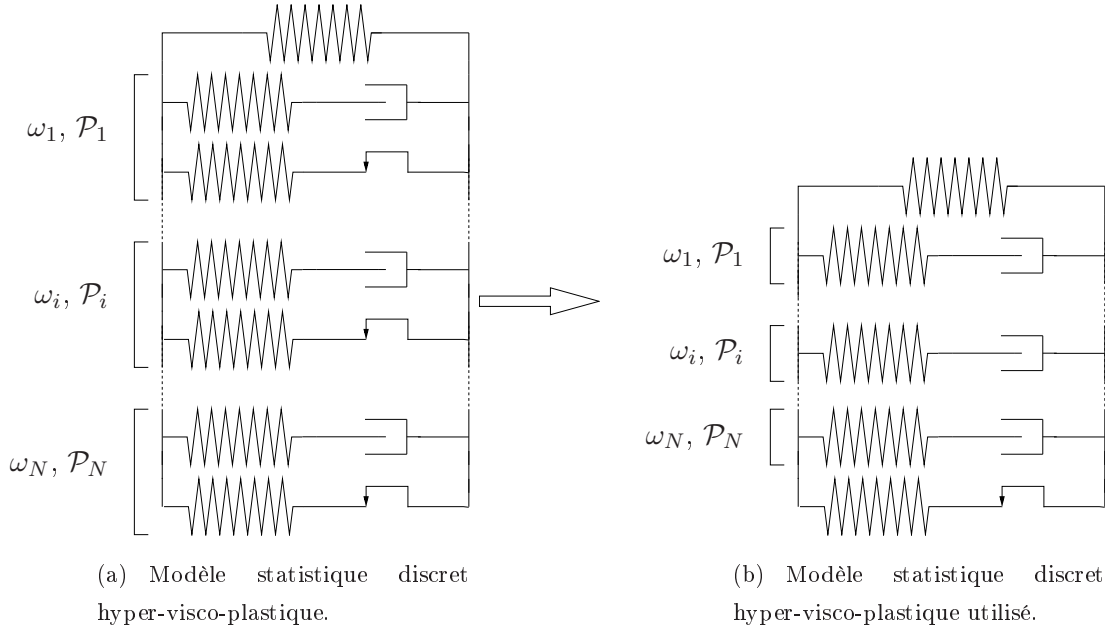


FIGURE VI.35 – *Interprétation physique du modèle statistique hyper-visco-plastique discret*

vement une inclusion et son mécanisme d'interaction avec la matrice (interface).

Une généralisation à plusieurs branches permet donc de décrire l'ensemble du comportement des charges en considérant chaque branche  $\omega_i$  associées aux poids  $\mathcal{P}_i$  du modèle statistique discret hyper-visco-plastique présenté FIGURE VI.35(a) telle que :

- $\omega_i$  est l'énergie d'activation des mécanismes d'inclusions, *i.e.* l'énergie nécessaire à la rupture des liaisons à l'interface [DROZDOV, 2000].
- $\mathcal{P}_i$  est la probabilité qu'une population de charges soit associée à l'énergie d'activation  $\omega_i$ .

Par ailleurs, nous supposons chaque branche hyper-élastoplastique est caractérisée par la même surface seuil de plasticité. Soit physiquement, que le seuil de glissement au niveau des interfaces est le même pour toutes les populations de charges. Dans ces conditions, on obtient alors le modèle statistique hyper-visco-plastique discret utilisé dans cette étude (*cf.* FIG. VI.35(b)).

## VI.6 Identification des paramètres à différentes températures

### VI.6.1 Présentation

Au CHAPITRE III, on a vu que le comportement de l'élastomère silicone VHDS 1029 est fortement conditionné par une variation de température. Généralement, l'observation d'évolutions thermiques au sein d'un matériau provient :

- des échanges avec le milieu extérieur (conduction, convection...),
- de la sollicitation mécanique imposée qui génère une dissipation intrinsèque échauffant le matériau (production interne de chaleur).

Dans la perspective de modéliser le comportement thermo-mécanique du matériau lors d'études futures (quelques éléments théoriques sont disponibles en ANNEXE A.6), il est nécessaire de connaître l'évolution en fonction de la température des six paramètres matériaux définissant le modèle statistique hyper-visco-plastique :  $C_1(T)$ ,  $A_p(T)$ ,  $\chi(T)$ ,  $G_0(T)$ ,  $\eta_\infty(T)$  et  $\Omega(T)$ .

En pratique, nous allons donc identifier ces coefficients à travers des essais réalisés à différentes températures ( $-55^\circ C$ ,  $-40^\circ C$ ,  $-25^\circ C$ ,  $25^\circ C$ <sup>(4)</sup>,  $40^\circ C$  et  $70^\circ C$ ) via la stratégie d'identification décrite au paragraphe VI.2.2. Les évolutions de ces paramètres en fonction de la température seront alors approchées par l'intermédiaire de lois non-linéaires.

#### REMARQUE VI.2

Le paramètre statistique n'ayant un sens que dans la construction d'un modèle capable de refléter un large domaine de fréquence, on considérera qu'il n'évolue pas suivant la température.  $\square$

### VI.6.2 Résultats d'identification

Une présentation des essais de double cisaillement à différentes températures qui sont utilisés ici comme références pour l'identification est disponible au CHAPITRE III.

L'application de la stratégie d'identification commence par la pré-identification des paramètres du modèle hyper-élastoplastique écrouissable sur un essai de montée en charge quasi-statique tel que  $\dot{\gamma} = 0.03s^{-1}$  et  $\gamma_{max} = 50\%$ .

Le TABLEAU VI.7 présente les paramètres et les erreurs relatives obtenues à toutes les températures. L'illustration des résultats d'identification via la FIGURE VI.36 associée aux erreurs relatives comprises entre 2.5% et 4.97% permettent de montrer que le modèle ainsi identifié présente une excellente corrélation avec l'expérience quelque soit la température envisagée.

---

(4). Pour permettre d'observer l'évolution des paramètres suivant la température, on va considérer que la température ambiante est de  $25^\circ C$



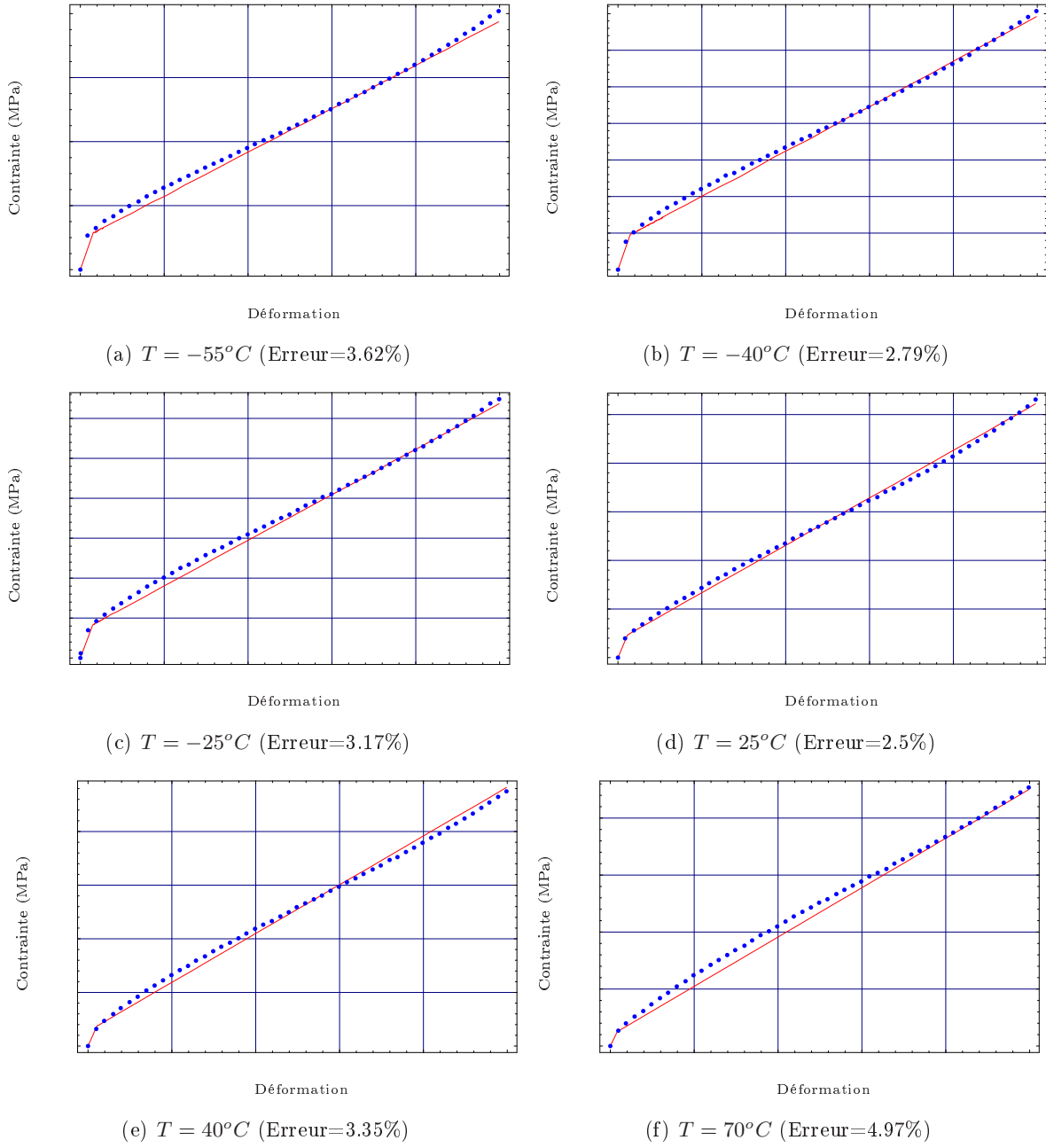


FIGURE VI.36 – Pré-identification des paramètres du modèle hyper-élastoplastique écrouissable sur un essai de montée en charge quasi-statique à différentes températures.

T (°C)	$C_1$ (MPa)	$A_p$ (MPa)	$\chi$ (Mpa)	Erreur (%)
-55	C.E.	C.E.	C.E.	3.62
-40	C.E.	C.E.	C.E.	2.79
-25	C.E.	C.E.	C.E.	3.17
25	C.E.	C.E.	C.E.	2.5
40	C.E.	C.E.	C.E.	3.35
70	C.E.	C.E.	C.E.	4.97

TABLEAU VI.7 – Paramètres identifiés lors de l'étape initiale pour différentes températures.

T (°C)	$C_1$ (MPa)	$A_p$ (MPa)	$\chi$ (Mpa)
-55	C.E.	C.E.	C.E.
-40	C.E.	C.E.	C.E.
-25	C.E.	C.E.	C.E.
25	C.E.	C.E.	C.E.
40	C.E.	C.E.	C.E.
70	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU VI.8 – Paramètres ajustés lors de l'étape intermédiaire pour différentes températures.

T (°C)	$C_1$ (MPa)	$A_p$ (MPa)	$\chi$ (Mpa)	$G_0$ (MPa)	$\eta_\infty$ (MPa.s)	$\Omega$	Erreur (%)	
							$3s^{-1}$	$10s^{-1}$
-55	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	10.84	12.43
-40	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	12.45	12.17
-25	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	15.28	11.82
25	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	7.98	8.75
40	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	6.79
70	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	6.86

TABLEAU VI.9 – Paramètres identifiés lors de l'étape finale pour différentes températures.

L'étape intermédiaire permet ensuite d'ajuster les paramètres ainsi identifiés sur l'élasticité différée à différentes températures (*cf.* FIG. VI.37). Le TABLEAU VI.8 présente les paramètres que nous avons obtenus sachant qu'ils seront fixés lors de la dernière étape.

Il nous reste maintenant à déterminer les paramètres de la branche statistique hyper-visco-élastique au cours de la dernière étape. Les jeux de paramètres ainsi identifiés et les erreurs relatives sont présentés TABLEAU VI.9.

L'observation qualitative d'une confrontation modèle SHVP/expérience des boucle d'hystérésis à l'état stabilisé pour les couples de paramètres de sollicitation  $(12.5\%, 3s^{-1})$ ,  $(25\%, 3s^{-1})$ ,  $(12.5\%, 10s^{-1})$  et  $(25\%, 10s^{-1})$  montre alors une corrélation convenable avec l'expérience quelle que soit la température (*cf.* FIG. VI.38, FIG. VI.39, FIG. VI.40 et FIG. VI.41).

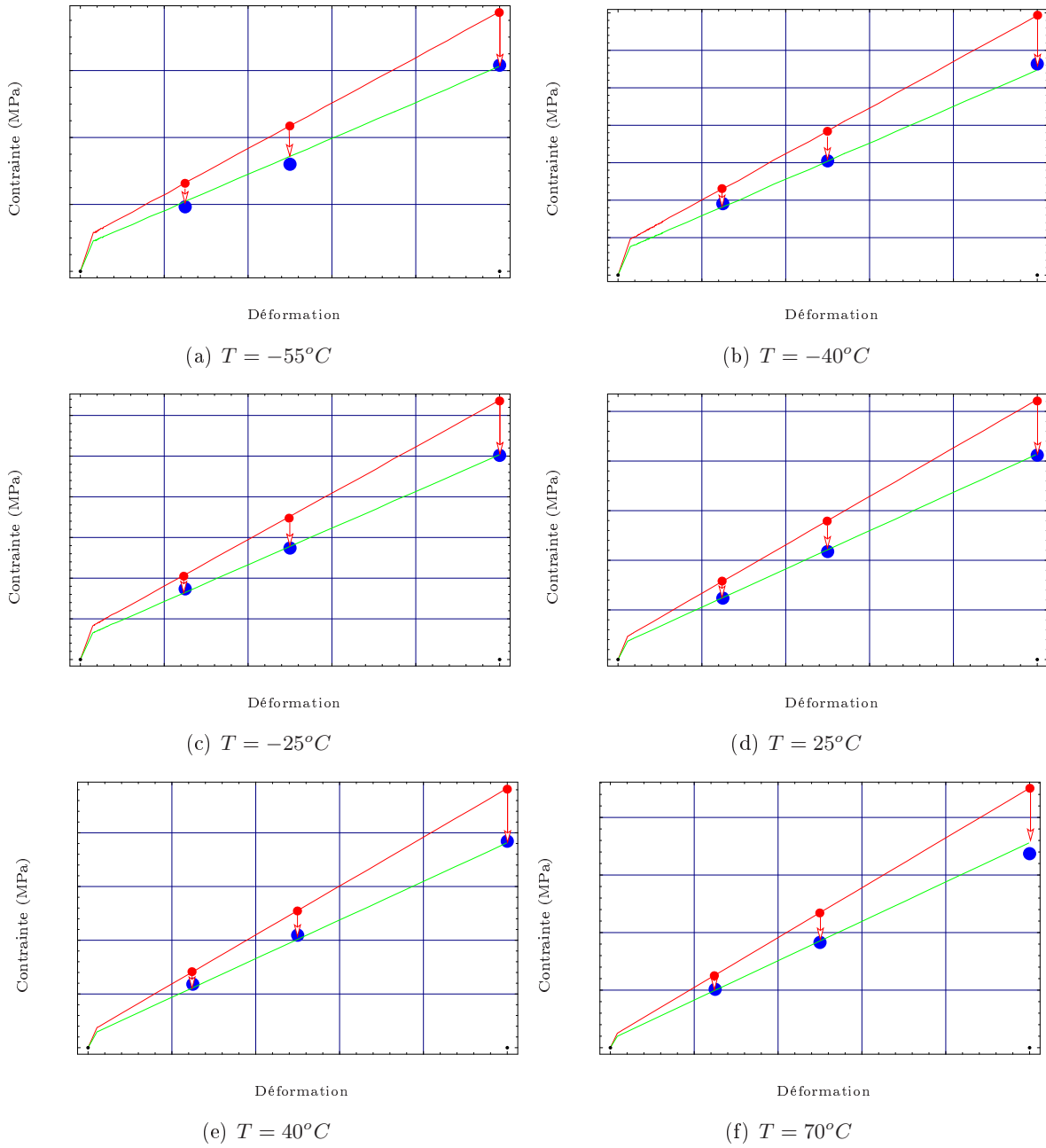


FIGURE VI.37 – Ajustement des paramètres du modèle hyper-élastoplastique sur l'élasticité différée (points bleus) obtenue avec trois essais de relaxation d'échelons de déformation de 12.5%, 25% et 50% à différentes températures.

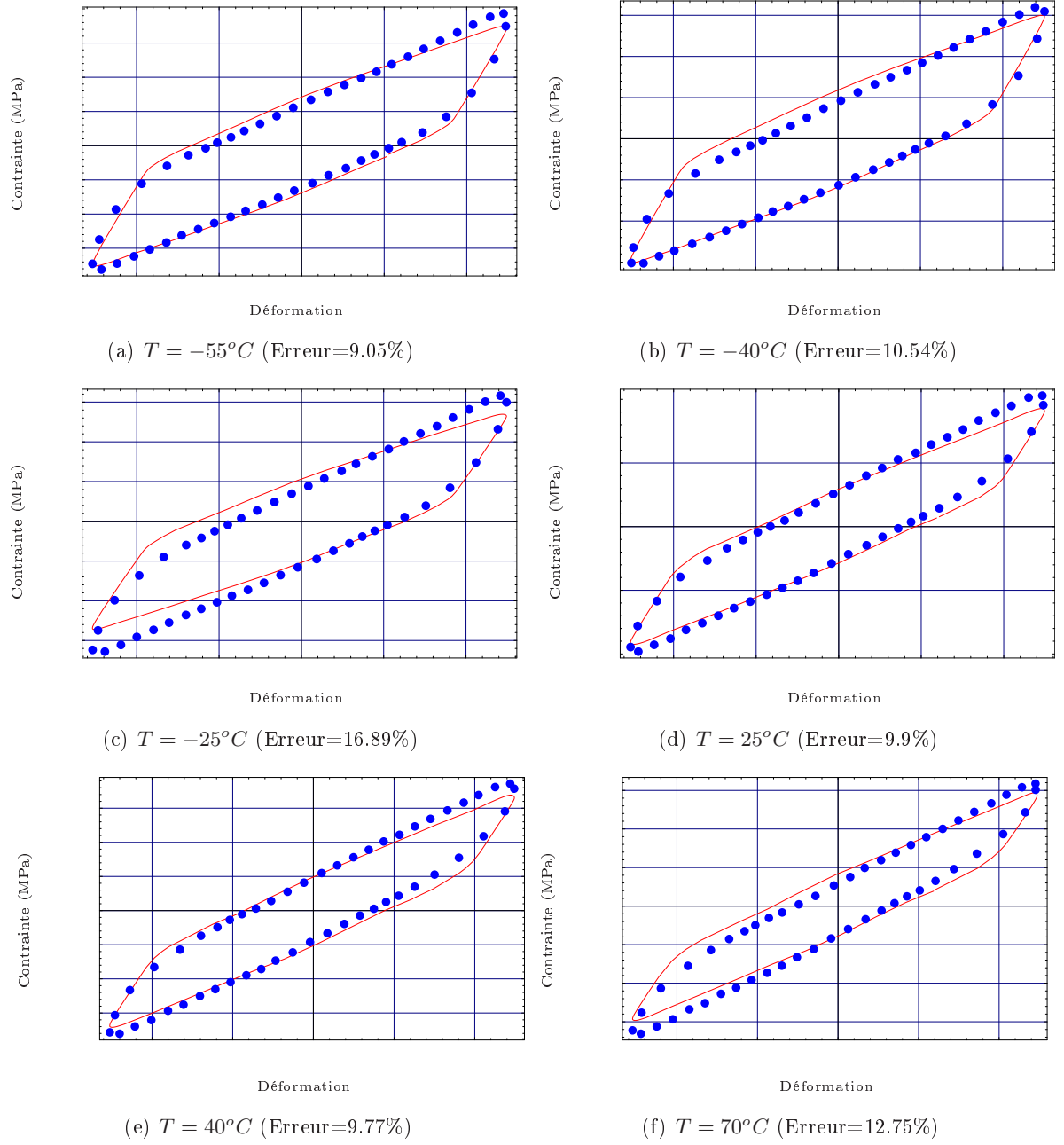


FIGURE VI.38 – Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que  $\gamma_{max} = 12.5\%$  et  $\dot{\gamma} = 3s^{-1}$ .

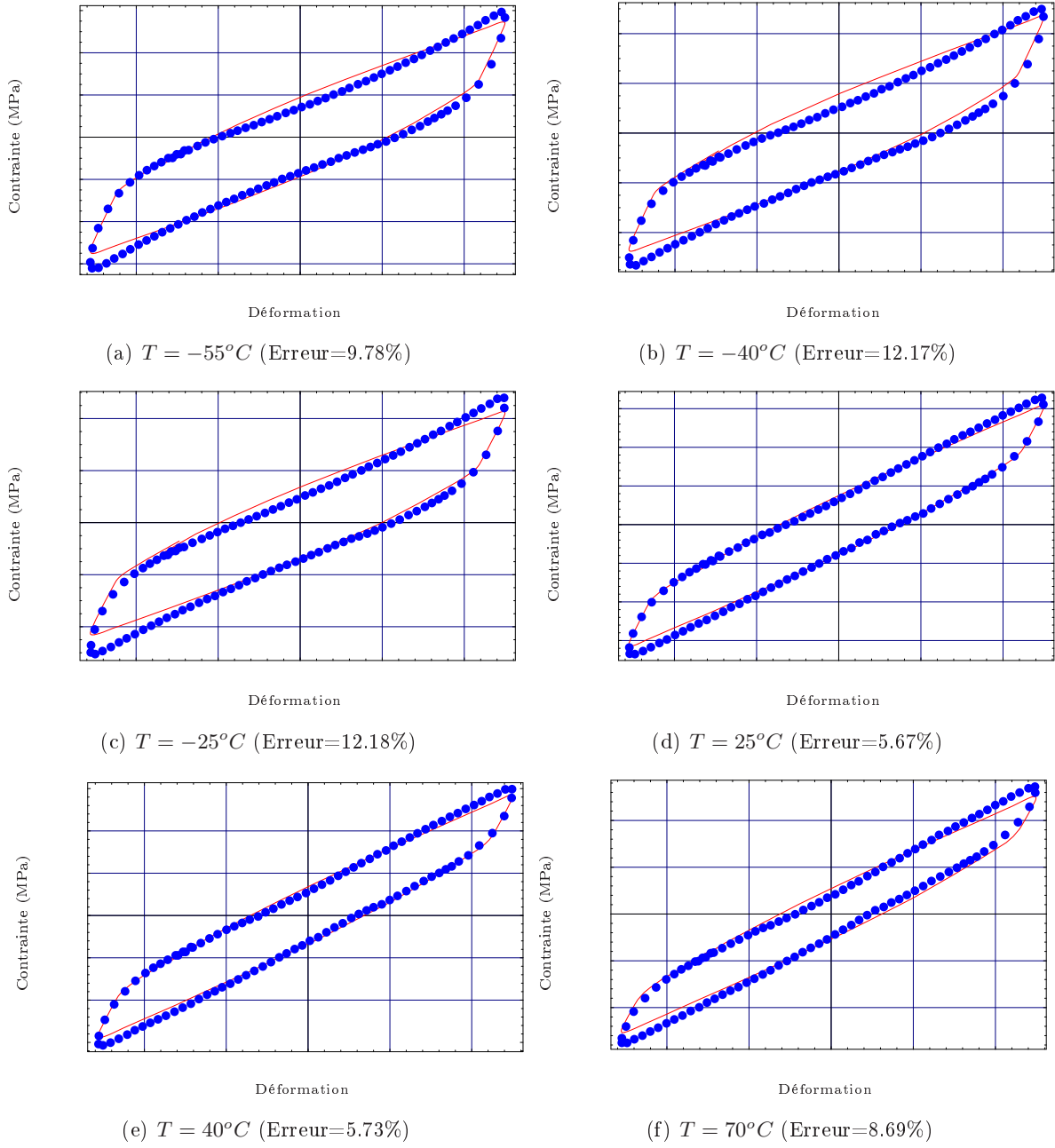


FIGURE VI.39 – Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que  $\gamma_{max} = 25\%$  et  $\dot{\gamma} = 3s^{-1}$ .

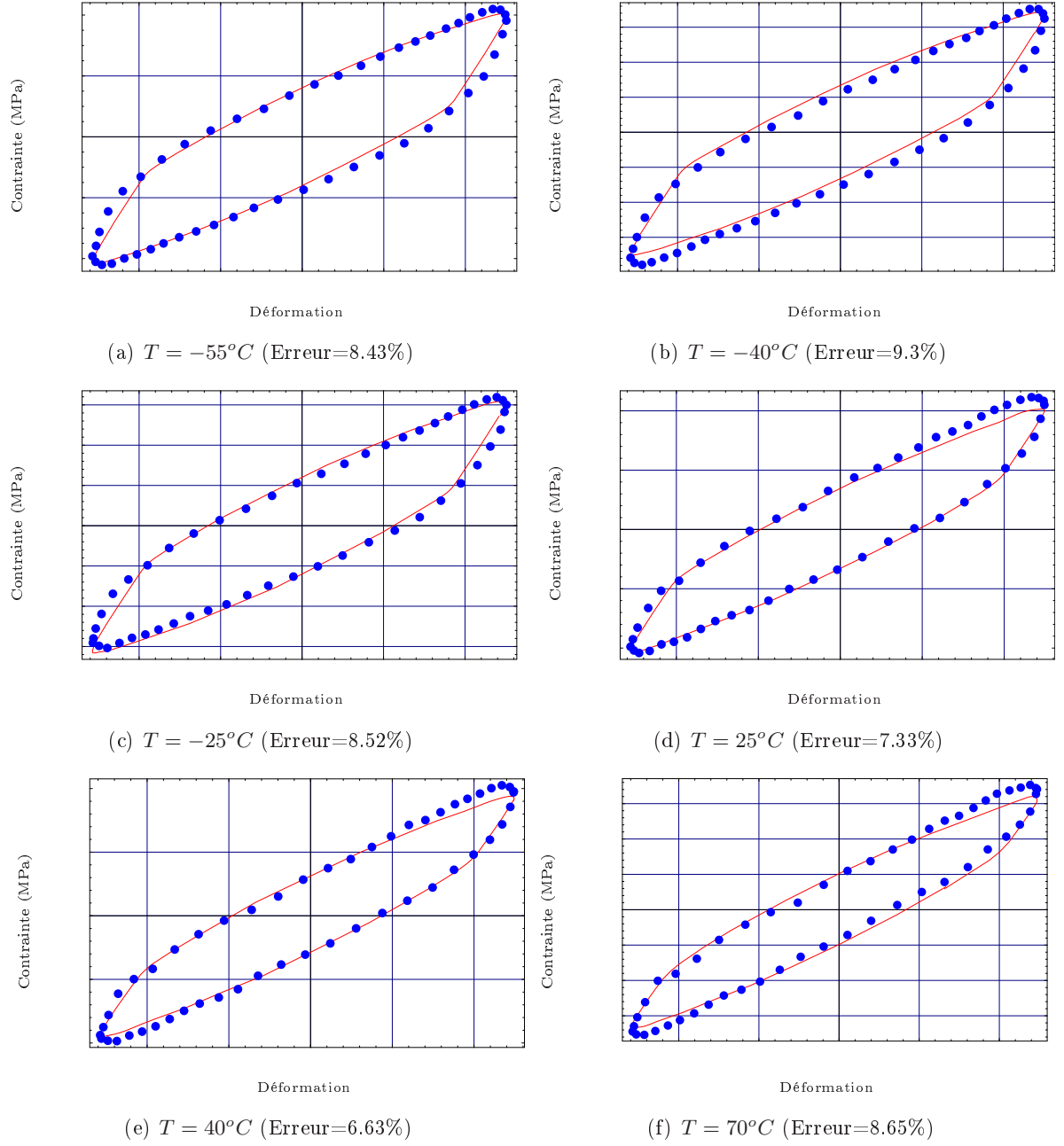


FIGURE VI.40 – Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que  $\gamma_{max} = 12.5\%$  et  $\dot{\gamma} = 10s^{-1}$ .

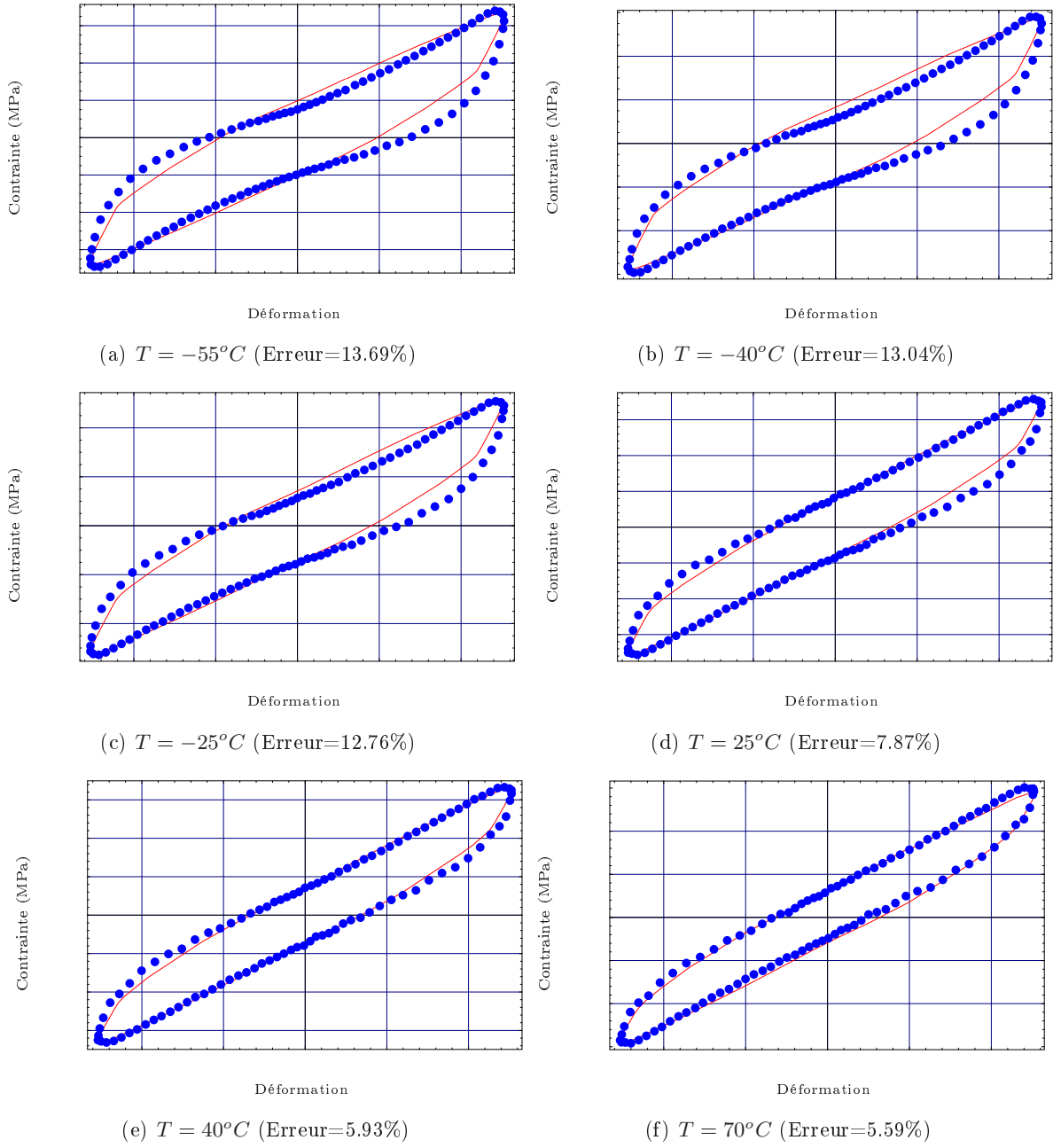


FIGURE VI.41 – Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que  $\gamma_{max} = 25\%$  et  $\dot{\gamma} = 10s^{-1}$ .

Seule la présence pour des sollicitations importantes d'un étranglement au passage à l'origine des déformations de plus en plus prononcée lorsqu'on se dirige vers les températures les plus basses n'est pas traduite par le modèle (*cf.* FIG. VI.38(a), VI.38(b), VI.38(c), VI.40(a), VI.40(b) et VI.40(c)).

La FIGURE VI.42 illustre l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale calculés via le modèle SHVP pour une sollicitation sinusoïdale à différentes températures. Le modèle semble en mesure de refléter l'accentuation des non-linéarités exhibées par l'évolution des grandeurs caractéristiques lorsqu'on descend dans les basses températures ; phénomène observé expérimentalement aux paragraphes III.5.4.b et III.5.4.a.

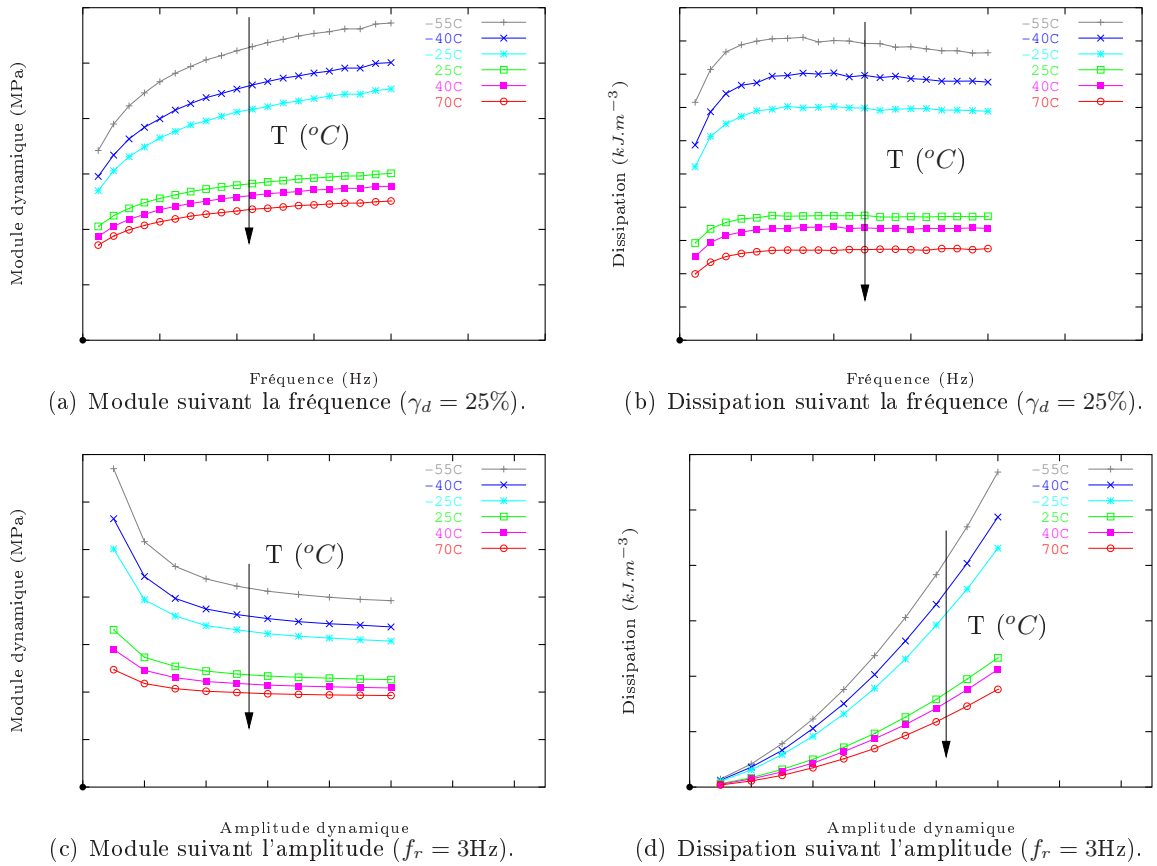


FIGURE VI.42 – Evolution de  $E^*$  et  $\Phi_{\text{cycle}}$  calculée via le modèle SHVP suivant la fréquence ( $\gamma_d = 25\%$ ) et l'amplitude ( $f_r = 3\text{Hz}$ ) pour une sollicitation sinusoïdale à diverses températures.



### VI.6.3 Evolution des paramètres suivant la température

Avant de définir des lois d'évolution des paramètres, nous proposons d'observer leur sensibilité à une variation de température (*cf.* TAB. VI.9). Pour cela, nous utilisons les paramètres normalisés par rapport à ceux identifiés à température ambiante tels que :

$$\text{Paramètre normalisé à } T = \frac{\text{Paramètre identifié à } T}{\text{Paramètre identifié à l'ambiant}}, \quad (\text{VI.30})$$

On peut alors regrouper les observations réalisées sur les paramètres normalisés suivant la nature des branches du modèle SHVP :

- **la branche hyperélastique globale** : le paramètre  $C_1$  diminue d'environ 50% suivant la température (*cf.* FIG. VI.43),
- **la branche statistique hyper-viscoélastique** : les paramètres  $G_0$  et  $\eta_\infty$  diminuent respectivement d'environ 160% et 140% (*cf.* FIG. VI.44),
- **la branche hyper-élastoplastique** : les paramètres  $A_p$  et  $\chi$  diminuent respectivement d'environ 130% et 220% (*cf.* FIG. VI.45),

On remarque alors que le paramètre le moins sensible est  $C_1$  représentant le caractère hyperélastique global, alors que le coefficient qui possède l'évolution la plus importante est  $\chi$  caractéristique de la plasticité dans le comportement.

L'allure décroissante non-linéaire des coefficients matériaux suivant la température, nous oriente vers une loi de type ARRHENIUS (*cf.* Eq. III.9), telle que pour un paramètre  $\mathbf{X}(T)$ , on ait :

$$\mathbf{X}(T) = a_1 \exp[-a_2 T] + a_3. \quad (\text{VI.31})$$

La FIGURE VI.46 propose une confrontation des lois d'évolution des paramètres face aux valeurs identifiées suivant la température et le TABLEAU VI.10 présente les coefficients des lois utilisés pour chaque paramètre matériau.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$C_1$	C.E.	C.E.	C.E.
$A_p$	C.E.	C.E.	C.E.
$\chi$	C.E.	C.E.	C.E.
$G_0$	C.E.	C.E.	C.E.
$\eta_\infty$	C.E.	C.E.	C.E.

TABLEAU VI.10 – Coefficients utilisés pour les lois d'évolution de chaque paramètre suivant la température.

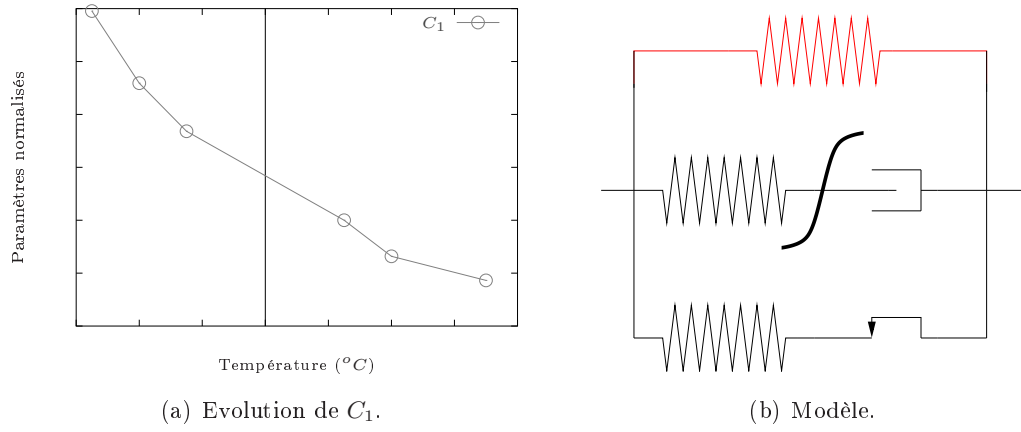


FIGURE VI.43 – Evolution du paramètre hyperélastique global suivant la température.

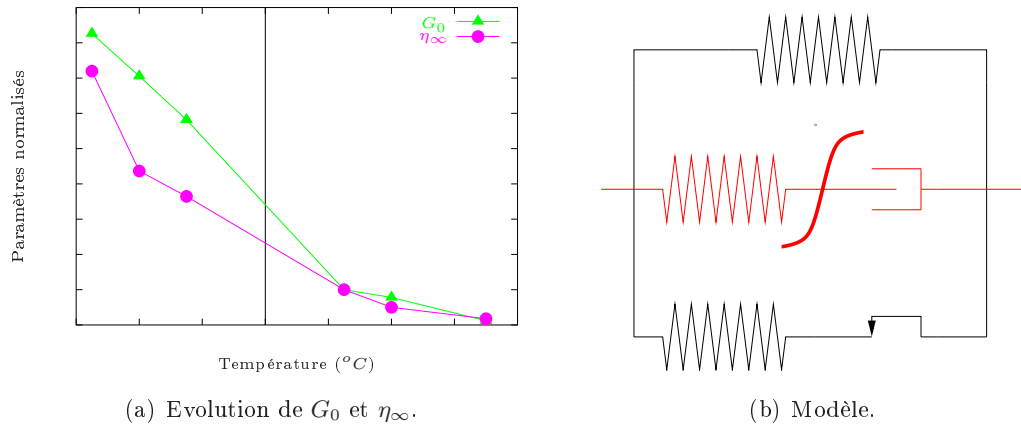


FIGURE VI.44 – Evolution des paramètres statistique hyper-visco-élastique suivant la température.

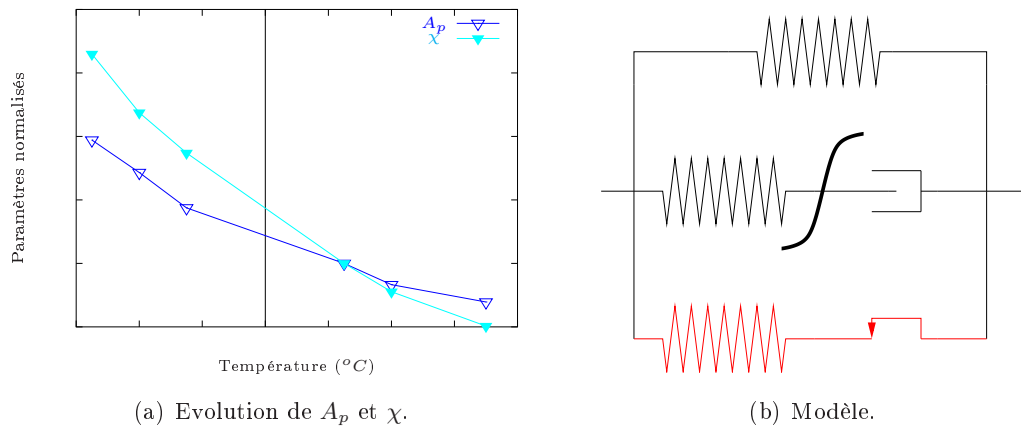


FIGURE VI.45 – Evolution des paramètres statistique hyper-élastoplastique suivant la température.

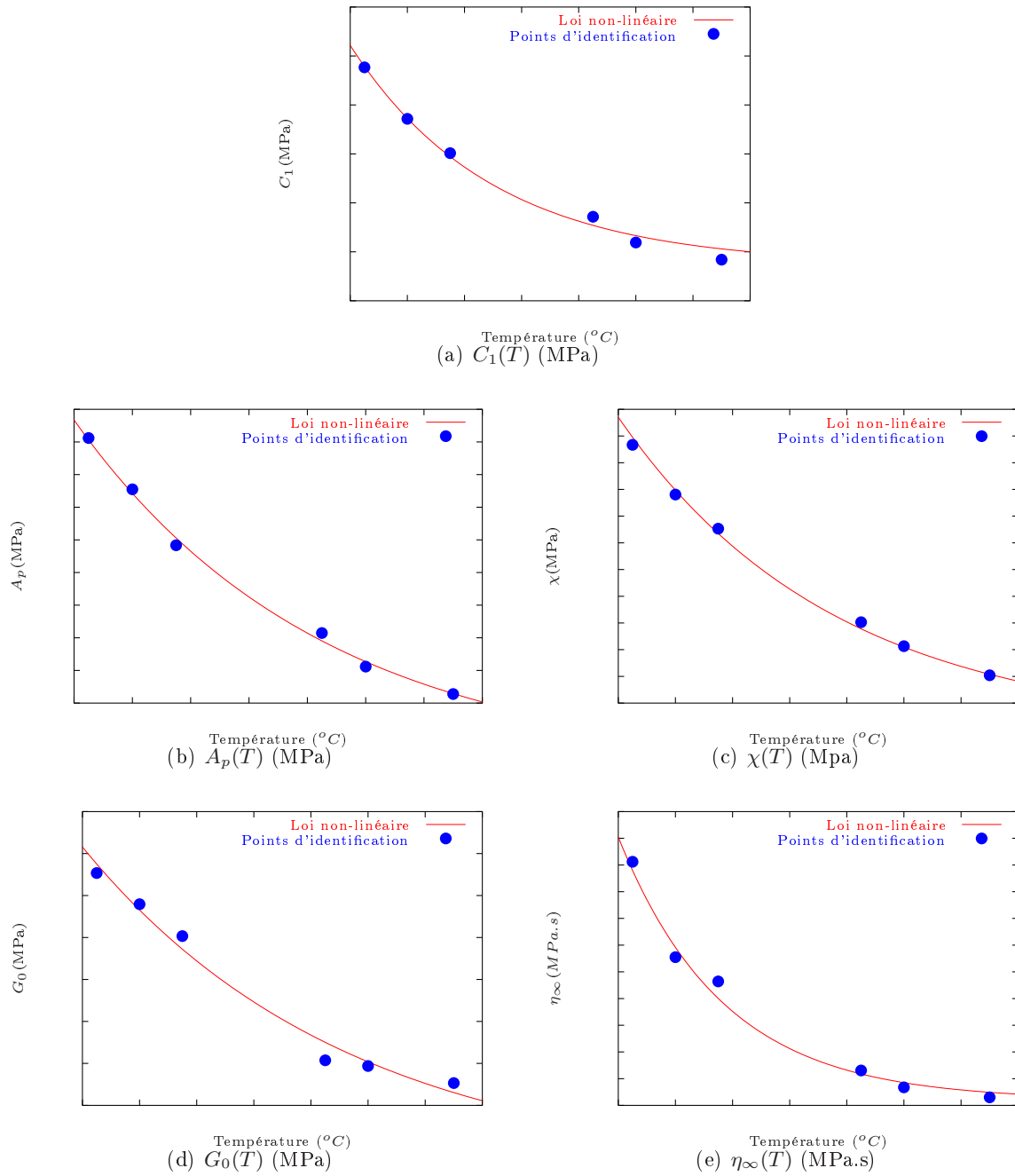


FIGURE VI.46 – Evolution des paramètres du modèle SHVP en fonction de la température.

## VI.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approche statistique d'un modèle multi-branches hyper-viscoélastique généralisé aux grandes déformations permettant de couvrir un large spectre de fréquences de sollicitations. Il présente alors l'avantage d'un modèle multi-branche mais avec un nombre de paramètres caractéristiques nettement moins important à identifier. Cependant ce modèle est incapable de rendre compte du phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude dynamique constaté expérimentalement.

Pour remédier à cela, nous avons choisi d'enrichir le modèle par une branche élastoplastique qui a nécessité alors l'élaboration d'une stratégie d'identification des coefficients matériaux. Cette méthodologie s'appuie alors sur le fait qu'en régime statique, le caractère élasto-dissipatif n'est issu que d'un comportement élastoplastique. Les résultats d'identification offrent alors une corrélation plus proche de l'expérience.

Une confrontation modèle/expérience via des sollicitations cycliques multi-harmoniques ou avec préchargement statique permet alors de valider le modèle ainsi identifié à température ambiante. Une brève analyse de la sensibilité des coefficients matériaux sur les grandeurs caractéristiques d'un comportement dissipatif permettant ensuite de dégager une interprétation physique des éléments constitutifs du modèle statistique hyper-visco-plastique.

Enfin, nous avons réalisé une campagne d'identification des paramètres à différentes températures qui nous a permis d'établir des lois d'évolution des paramètres suivant la température de type *ARRHENIUS*. Ces évolutions sont alors compatible avec les observations réalisées au *CHAPITRE III* à savoir une rigidification, une augmentation de la dissipation et une accentuation des effets plastiques lorsqu'on descend dans les basses températures.





---

## Conclusion générale

Dans un premier temps, nous avons caractérisé le comportement de l'élastomère silicone chargé VHDS 1029 via des essais expérimentaux, afin de dégager des observations qualitatives et quantitatives permettant de motiver la construction d'un modèle phénoménologique.

Nous avons donc réalisé une campagne d'essais en traction uniaxiale et en double cisaillement qui a permis de mettre en évidence les paramètres influant la réponse du matériau pour divers types de sollicitations (montée en charge, relaxation, cyclique...). Ainsi, on a pu montrer les effets de divers facteurs expérimentaux comme le temps d'observation, le vitesse de sollicitation, l'amplitude maximale statique ou dynamique de chargement ainsi que la température.

La prise en compte de ces observations expérimentales dans nos développements nous amène à considérer un comportement élasto-dissipatif nécessitant un formalisme mécanique en grandes déformations et fortement dépendant de la température du matériau. Ainsi, il est constitué d'une composante élastique non-linéaire et d'une composante dissipative dépendant de la vitesse de déformation et de l'amplitude de chargement.

D'un point de vue microstructural, ce phénomène d'amortissement est principalement dû à un réarrangement moléculaire au niveau de la structure interne du matériau qui permet d'observer un glissement aux interfaces générant une perte d'énergie par viscosité (frottement entre chaînes macromoléculaires), plasticité (frottement aux interfaces charge-charge et charge-matrice) et décohésion, rupture et cavitation (effets d'endommagement).

Nous avons donc commencé par étudier le comportement élastique non-linéaire du matériau. Sa grande faculté de déformation nécessite alors de considérer le comportement comme hyperélastique. On peut alors choisir une forme de densité d'énergie libre parmi une multitude de

modèles proposés dans la littérature. La réalisation d'une campagne d'identification sur certains d'entre eux montre alors que plus on augmente le nombre de paramètres à identifier plus les modèles semblent plus performants. Cependant la complexité des modèles et la multiplicité des paramètres à identifier engendrent des difficultés liées à la non-unicité du jeu de paramètres ou encore à la définition du domaine de stabilité du modèle.

Aux phénomènes microstructuraux dissipatifs décrits précédemment, on a pu associer des familles de comportement comme la viscoélasticité, l'élastoplasticité ou l'endommagement. La littérature nous enseigne alors que les modèles foisonnent au sein même de chaque famille mais qu'aucun consensus ne se dessine nettement. Motivé par la représentation des phénomènes observés expérimentalement, nous avons fait le choix de réaliser une première approche phénoménologique différentielle du comportement dissipatif. Ainsi, tous nos développements ont été réalisés dans un cadre thermodynamique permettant la généralisation aux grandes déformations des modèles rhéologiques via l'introduction d'états intermédiaires. Nous avons opté pour les modèles de comportement viscoélastique compte tenu de leur capacité de rendre compte de l'influence de la fréquence sur la réponse. Pour traduire le phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude de déformation, nous avons mis en œuvre des modèles élastoplastiques écrouissables. La campagne d'identification des paramètres de ces modèles à partir d'essais cycliques sinusoïdaux en double cisaillement réalisés à température ambiante a permis alors de tirer les enseignements suivants :

- les modèles hyper-viscoélastiques unitaires corrélaient convenablement l'expérience pour une sollicitation cyclique donnée (*i.e.* une amplitude et une fréquence données) et l'utilisation d'un modèle de MAXWELL généralisé permet la couverture d'un domaine de fréquence pour une amplitude de déformation donnée. La largeur de ce domaine semble être liée à son nombre de branche ;
- le modèle hyper-élastoplastique unitaire permet d'obtenir la meilleure (face aux modèles unitaires hyper-viscoélastiques) corrélation avec l'expérience pour une sollicitation sinusoïdale et traduit un phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude. L'utilisation d'un modèle de SAINT-VENANT généralisé permet alors de décrire finement les phénomènes induits par une évolution de l'amplitude dynamique pour une fréquence fixée ;

Nous avons alors proposé d'utiliser une approche statistique qui généralisera les assemblages mono-branches hyper-visco-élastiques à une infinité de branches. L'apport de cette méthode réside en une couverture d'un large spectre de fréquences, à savoir les avantages d'un modèle de MAXWELL généralisé mais, avec un faible nombre de paramètres matériaux à identifier. Pour l'identification, nous avons choisi d'utiliser des essais cycliques triangulaires à amplitude progressive permettant ainsi de coupler l'influence de la fréquence et de l'amplitude dynamique. Cependant, alors que le modèle corréla convenablement l'expérience, il ne traduit pas l'assouplissement suivant l'amplitude dynamique.

Pour pallier à cela, nous avons enrichi le modèle statistique hyper-viscoélastique d'une branche élasto-plastique qui a nécessité l'élaboration d'une stratégie d'identification des coefficients matériaux. En effet, on distingue la proportion du caractère dissipatif due à la plasticité de celle traduite par la viscosité en considérant que le phénomène de dissipation en régime (quasi)statique n'est issu que d'un comportement élastoplastique. Les résultats offrent ainsi une corrélation beaucoup plus proche tout en permettant la représentation des phénomènes induits à la fois par une variation de la fréquence et de l'amplitude dynamique.

Une validation du modèle statistique hyper-visco-plastique ainsi identifié a été réalisée par confrontation modèle/expérience pour des sollicitations sinusoïdales combinées (cycliques multi-harmoniques et cycliques avec préchargement statique). Le modèle reflète alors convenablement le comportement réel tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif.

Une interprétation physique des éléments rhéologiques constituant un tel modèle a pu être proposée en s'appuyant sur le caractère multiphasique du matériau.

Finalement, la mise en œuvre de notre méthodologie d'identification à différentes températures a permis de mettre en évidence des lois d'évolution des paramètres du modèles. Evolution qui s'est avérée compatible avec les observations faites sur les comportements de cette famille de matériau à diverses températures (une rigidification, une augmentation de la dissipation ainsi qu'une accentuation des effets plastiques lorsqu'on descend dans les basses températures).

Les perspectives offertes par ce travail de recherche sont alors :

- envisager un couplage thermo-mécanique pour la modélisation des pièces amortissantes via les lois d'évolution des paramètres suivant la température,
- enrichir le comportement hyperélastique global en vue de représenter plus finement les non-linéarités qui apparaissent à des déformations plus élevées et par la même, décrire le phénomène de dissymétrie des boucles d'hystérésis présent lors de chargement cycliques avec pré-déformation,
- introduire un écrouissage non-linéaire permettant d'affiner le phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude dynamique au cours d'un chargement cyclique,
- implémenter ce modèle dans un code de calcul éléments finis en vue de simuler le comportement de pièces réelles sous chargements combinés et dans différentes conditions thermiques,
- prendre en compte les phénomènes d'endommagement afin de prévoir la durée de vie des pièces réelles.







---

## Bibliographie

- J. ABOUCHITA, M. MASRAR et N. GUENNOUN. Analyse non linéaire tridimensionnelle par éléments finis des composants lamifiés élastomères. *Mécanique & Industries*, 4 :293–248, 2003.
- F. ANDRIEUX, K. SAANOUNI et F. SIDOROFF. Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement. *C. R. Acad. Sci.*, 324(SérieIIb) :281–288, 1997.
- E.M. ARRUDA et M.C. BOYCE. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J Mech Phys Solids*, 41 :389–412, 1993.
- X. AUBARD, P. A. BOUCARD, P. LADEVEZE et S. MICHEL. Modeling and simulation of damage in elastomer structures at high strains. *Computers and Structures*, vol. 80 :p. 2289–2298, 2002.
- H. BARNES. Thixotropy – a review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 70 :1–33, 1997.
- J.S. BERGSTRÖM et M.C. BOYCE. Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissues. *Mechanics of Materials*, 33 :523–530, 2001.
- J.S. BERGSTRÖM, S.M. KURTZ, C.M. RIMNAC et A.A. EDIDIN. Constitutive modeling of ultra-high molecular weight polyethylene under large-deformation and cyclic loading conditions. *Biomaterials*, 23 :2329–2343, 2002.
- B. BERNSTEIN, E.A. KEARSLEY et L.J. ZAPAS. A study of stress relaxation with finite strain. *Transaction of the Society of Rheology*, 7 :391–410, 1963.
- D. BESDO et J. IHLEMANN. The effect of softening phenomena in filled rubber inhomogeneous loading. Schuster Besdo et Ihlemann (eds), editors, *Constitutive models for rubber II*, pages 137–147, 2001.

- J. BESSON, CAILLETAUD G., J.L. CHABOCHE et FOREST S. *Mécanique non-linéaire des matériaux*. Hermes, 2001.
- J. BIKARD. *Un modèle de comportement visco-élastique plastique endommageable pour les élastomères chargés*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2002.
- J. BIKARD et T. DÉSOYER. Finite viscoelasticity, plasticity and damage of a class of filled elastomers: constitutive model. *Mechanics Research Communications*, 28 :693–702, 2001.
- A. BOUKAMEL. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1988.
- A. BOUKAMEL. *Cours de rhéologie des matériaux*. Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille, 2001.
- A. BOUKAMEL, C. GABRIELI et S. MÉO. Modélisation en grandes déformations viscoélastiques des élastomères. *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, pages 387–396, 1997.
- A. BOUKAMEL et S. MÉO. Identification of the mechanical parameters linked to a visco-hyperelastic model: Application to a class of elastomers. Schuster Besdo et Ihlemann (eds), editors, *Constitutive Models for Rubber II*, pages 267–272, 2001.
- A. BOUKAMEL et S. MÉO. Model with multiple intermediate visco-plastic states. *Euromech Colloquium on Constitutive Equations for Polymer Microcomposites: on the border of Mechanics and Chemistry*, Wien, 2002.
- A. BOUKAMEL, S. MÉO, O. DÉBORDES et M. JAEGER. A numerical formulation for thermo-viscoelastic model in large strain. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2000.
- A. BOUKAMEL, S. MÉO, O. DÉBORDES et M. JAEGER. A thermo-viscoelastic model for elastomeric behaviour and its numerical application. *Archive of Applied Mechanics*, 71 :785–801, 2001.
- C.R. BRACKBILL. *Helicopter rotor aeroelastic analysis using elastomeric damper model*. Thèse de Doctorat, The Pennsylvania State University, The graduate scholl, Department of aerospace engineering, 2000.
- C.R. BRACKBILL, G.A. LESIEUTRE, E.C. SMITH et L.E. RUHL. Characterization and modeling of the low strain amplitude and frequency dependent behavior of elastomeric damper materials. *Journal of the American Helicopter Society*, 45 :34–42, 2000.
- S.L. BURTSCHER et A. DORFMANN. Compression and shear tests of anisotropic high damping rubber bearings. *Engineering Structures*, 26 :1979–1991, 2004.
- S. CANTOURNET. *Endommagement et fatigue des élastomères*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2002.
- S. CANTOURNET et R. DESMORAT. Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère. *C.R. Mecanique*, 331 :265–270, 2003.

- 
- M. CARTAULT, A. MONGRUEL et LEBLANC J-L. Modélisation du comportement viscoélastique non-linéaire d'élastomères chargés. *XVème Congrès Français de Mécanique*, 2001.
- R.M. CHRISTENSEN. *Theory of viscoelasticity, an introduction*. Academic Press Inc., New York, 1971.
- P.G. CIARLET. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, 1986.
- B.D. COLEMAN et W. NOLL. Foundations of linear viscoelasticity. *Rev. Mod. Phys.*, 33 :239–249, 1961.
- J. COURTOIS. *Une approche physiquement motivée pour l'endommagement des élastomères*. Mémoire de DEA, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2003.
- K.K. DARVISH et J.R. CRANDALL. Nonlinear viscoelastic effects in oscillatory shear deformation of brain tissue. *Medical Engineering and Physics*, 23 :633–645, 2001.
- L. DEWIMILLE et L. BOKOBZA. Rôle de l'interface charge-matrice dans des réseaux de polydiméthylsiloxane (pdms) renforcés par des particules de silice générées *in situ*. *Premier congrès interdisciplinaire sur les matériaux en France*, 2002.
- L. DORFMANN et R. W. OGDEN. Stress softening in rubber-like solids subjected to cavitation damage. Schuster Besdo et Ihlemann (eds), editors, *Constitutive Models for Rubber II*, pages 193–203, 2001.
- A. DRAGON, F. HILD, L. ROTA et H. TRUMEL. Modélisation du comportement et de la rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques. *Mec.Ind.*, 1 :521–537, 2000.
- A.D. DROZDOV. A model of cooperative relaxation in finite viscoelasticity of amorphous polymers. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 35 :897–909, 2000.
- J.D. FERRY. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley Sons, Inc., 1970.
- C. GABRIELI. *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1995.
- F. GANDHI et I. CHOPRA. An analytical model for a nonlinear elastomeric lag damper and its effect on aeromechanical stability in hover. *Journal of the American Helicopter Society*, 39 : 59–69, 1994.
- A.N. GENT et A.G. THOMAS. Forms for the stored strain energy function for vulcanised rubber. *J. of Polym. Sci.*, 28 :625–637, 1958.
- P GERMAIN. *Cours de Mécanique des milieux continus, tome 1*. Masson, 1973.
- P GERMAIN. *Mécanique 182. Cours de l'Ecole Polytechnique*. Ellipses, 1986.
- H.J. GOLDEN, T.W. STRGANAC et R.A. SCHAPERY. An approach to characterize nonlinear viscoelastic material behavior using dynamic mechanical tests and analyses. *Journal of Applied Mechanics*, 66 :872–878, 1999.
- J. GOUGH. *A description of a property of caoutchouc or indian rubber; with some reflections on the cause of the elasticity of this substance*. In a letter to DR.HOLME, 1803.

- S. GOVINDJEE et J. SIMO. Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology: carbon black filled rubbers incorporating MULLINS' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 40:213–233, 1992.
- S. GOVINDJEE et J.C. SIMO. A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating MULLINS' effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 39:87–112, 1991.
- A.E. GREEN et R.S. RIVLIN. The mechanics of non-linear materials with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1:1–21, 1957.
- B. HALPHEN et NGUYEN QUOC SON. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Méc.*, 14:39–63, 1975.
- L.J. HART-SMITH. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *J. Appl. Math. Phys.*, 17:608–626, 1966.
- S. HARTMANN. Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 38:7999–8018, 2001.
- J.A.C. HARWOOD, L. MULLINS et A.R. PAYNE. Stress softening in rubbers: a review. *Journal of the IRI*, pages 17–27, 1967.
- P. HAUPT, A. LION et E. BACKJAUS. On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters. *Int. J. Solids Structures*, 37:3633–3646, 2000.
- G.A. HOLZAPFEL, T.C. GASSER et M. STADLER. A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element simulation. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 21:441–463, 2002.
- G.A. HOLZAPFEL et J. SIMO. Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 132:17–44, 1996a.
- G.A. HOLZAPFEL et J. SIMO. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes. *Int. J. Solids Structures*, 33:3019–3034, 1996b.
- N. HUBER et C. TSAKMAKIS. Finite deformation viscoelasticity laws. *Mechanics of Materials*, 32:1–18, 2000.
- M.F. JAZZAR. *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1993.
- A.R. JOHNSON, C.J. QUIGLEY et C.E. FREESE. A viscohyperelastic finite element model for rubber. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 127:163–180, 1995.
- M. KALISKE. A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185:225–243, 1998.

- 
- M. KALISKE et H. ROTHERT. Viscoelastic and elastoplastic damage formulations. A.Dorfmann et A.Muhr Editors, editors, *Constitutive Models for Rubber I*, pages 159–167, 1999.
- M. KALISKE et H. ROTHERT. Constitutive approach to rate-independant properties of filled elastomers. *Int. J. Solids Structures*, 35 :2057–2071, 2000.
- G.M. KAMATH, N.M. WERELEY et JOLLY M.R. Characterization of magnetorheological helicopter lag damper. *Journal of the American Helicopter Society*, 44 :234–248, 2000.
- K.K. KAR et K. BHOWMICK. Medium strain hysteresis loss of natural rubber and styrene-butadiene rubber vulcanisates : a predictive model. *Polymer*, 40 :683–694, 1999.
- N. LAHELLEC. *Homogénéisation et étude expérimentale de composites hyperélastiques et visco-hyperélastiques*. Thèse de Doctorat, Université de la méditerranée, Aix-Marseille II, 2001.
- L. LAIARINANDRASANA, R. PIQUES et A. ROBISSON. Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total lagrangian formulation. *International Journal of Plasticity*, 19 :977–1000, 2003.
- J. LAMBERT-DIANI et C. REY. Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères : principe et avantages. *C. R. Acad. Sci.*, 326(SérieIIb) :483–488, 1998.
- J. LAMBERT-DIANI et C. REY. New phenomenological behavior laws for rubbers and thermo-plastic elastomers. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18 :1027–1043, 1999.
- P. LE TALLEC et C. RAHIER. Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37 :1159–1186, 1994.
- J.L. LEBLANC. Interaction caoutchouc-noir de carbone et compréhension du mélangeage des caoutchoucs. *11èmes journées techniques du LRCCP*, 2003.
- J.B. LEBLOND. A constitutive inequality for hyperelastic materials in finite strain. *European journal of mechanics, A/Solids*, 11 :447–466, 1992.
- S. LEJEUNES. *Stabilité de structure lamifié élastomère-métal*. Mémoire de DEA, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2002.
- S. LEJEUNES, A. BOUKAMEL, B. COCHELIN et E. ZOPPITELLI. Stabilité matérielle et structurale d’un lamifié élastomère-métal. *Actes du Sixième Colloque National en Calcul des Structures*, pages Tome 2, p. 535–542, 2003.
- J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides, 2nd Edition*. Dunod, Paris, 1996.
- T. LEMOINE. *Cours de sciences des matériaux : Matériaux élastomères*. Ecole Supérieure d’Ingénieurs de Marseille, 2001.
- A.I. LEONOV. On thermodynamics and stability of general MAXWELL-like viscoelastic constitutive equations, theoretical and applied rheology. *XIth Int. Cong. On Rheology*, pages 97–99, 1992.

- G.A. LESIEUTRE et K. AND GOVINDSWAMY. Finite element modeling of frequency-dependent and temperature-dependent dynamic behavior of viscoelastic materials in simple shear. *Int. J. Solids Structures*, 33 :419–432, 1996.
- A. LION. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1805–1834, 1997.
- A LION. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories : experiments and theory. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46 :895–930, 1998.
- J.M. MARTINEZ, A. BOUKAMEL, S. MÉO et P. LEGENDRE. Approche multi-fréquentielle du comportement viscoélastique en grandes déformations des élastomères. *Journal de Physique IV Proceeding*, vol. 102 :p. 267–274, 2002.
- C. MIEHE. Discontinuous and continuous damage evolution in OGDEN-type large-strain elastic materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14 :697–720, 1995.
- C. MIEHE et J. KECK. Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 48 :323–365, 2000.
- M. MOONEY. A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.*, 11 :582–592, 1940.
- C. MOREAU. *Etude expérimentale et numérique de l'hyperélasticité avec prise en compte de la compressibilité. -Identification paramétrique inverse. -Application aux élastomères compacts : polychloroprène, mélanges à base de caoutchouc naturel.* Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Sud, 2000.
- K.N. MORMAN. Original contributions. an adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like by use of the generalised strain measure. *Rheologica Acta*, 27 :3–14, 1988.
- A. MUJUMDAR, A.N. BERIS et B. METZNER. Transient phenomena in thixotropic systems. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 102 :157–178, 2002.
- L. MULLINS. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, 16 : 275–289, 1947.
- S. MÉO. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : De l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité.* Thèse de Doctorat, Université de la méditerranée, Aix-Marseille II, 2000.
- S. MÉO, A. BOUKAMEL et J-M. MARTINEZ. Modélisation du comportement hyper-viscoplastique en grandes déformations des élastomères. *DEPOS 18 Colloque sur la déformation des polymères solides*, 2003.
- B. NEDJAR. Frameworks for finite strain viscoelastic-plasticity based on multiplicative decompositions. part i: Continuum formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :1541–1562, 2002.

- 
- R.W. OGDEN. Large deformation isotropic elasticity, on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids. *Proc. Roy. Soc., Lond.*, A326 :565–584, 1972.
- A.K. OLSSON et P.-E. AUSTRELL. A fitting procedure for a viscoelastic-elastoplastic material model. Schuster Besdo et Ihlemann (eds), editors, *Constitutive models for rubber II*, pages 261–266, 2001.
- N. PHAN-THIEN. Squeezing flow of a viscoelastic solid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 95 :343–362, 2000.
- J. RAMIER, C. GAUTHIER, CHAZEAU L. et STELANDRE L. Mécanisme de renforcement des élastomères chargés avec de la silice : Influence du traitement de surface. *Premier congrès interdisciplinaire sur les matériaux en France*, 2002.
- G.A. RAMRAKHYANI, D.S. AND LESIEUTRE et E.C. SMITH. Modeling of elastomeric materials using nonlinear fractional derivative and continuously yielding friction elements. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :3929–3948, 2004.
- A. ROBISSON. *Comportement d'un élastomère SBR chargé de silice et d'un PU cellulaire : prévision de la durée de vie en fatigue*. Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2000.
- M. ROUSSEAU, F. HADDAD et Y. GOURINAT. Un dispositif pour la caractérisation des propriétés amortissantes de matériaux viscoélastiques non-linéaires en cisaillement. *Mécanique et Industries*, 3 :271–278, 2002.
- P. SAAD. *Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- F. SIDOROFF. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic finite strain. *Arch. Mech.*, 25(2) :299–309, 1973.
- F. SIDOROFF. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 13(4) :679–713, 1974.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 1. variable internes scalaires et tensorielles. *J. Méc.*, 14(3) :545–566, 1975a.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 2. milieux avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 14(4) :571–595, 1975b.
- F. SIDOROFF. Variables internes en viscoélasticité, 3. milieux avec plusieurs configurations intermédiaires. *J. Méc.*, 15(1) :85–118, 1976.
- F. SIDOROFF. Rhéologie non-linéaire et variables internes tensorielles. *Symposium franco-polonais*, 1977.
- F. SIDOROFF. Cours sur les grandes déformations. *Ecole d'été, Sophia-Antipolis*, 1982.
- J.C. SIMO. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : fomulation and computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 60 :153–163, 1987.



- 
- M. SJÖBERG. *On dynamic properties of rubber isolators*. Thèse de Doctorat, Royal Institute of Technology. Department of Vehicle Engineering. The Marcus Wallenberg Laboratory for Sound and Vibration Research, Stockholm, 2002.
- J.C. SNOWDON. *Vibration and shock in damped mechanical systems*. John Wiley and Sons, Inc., 1968.
- P. SUQUET. *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 1982.
- L.R.G. TRELOAR. The elasticity of a network of long chain molecules I. *Trans. Faraday Soc.*, 39:36–64, 1943.
- I.M. WARD et J. SWEENEY. *An introduction of the mechanical properties of solid polymers*. 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley and sons, ltd, 2004.
- A. WINEMAN, T. VAN DYKE et S. SHI. A nonlinear viscoelastic model for one dimensional response of elastomeric bushings. *Int. J. Mech. Sci.*, 40:1295–1305, 1998.

# Table des figures

I.1	Charles GOODYEAR, 1839 . . . . .	7
I.2	Isoprène, $C_5H_8$ . . . . .	9
I.3	Architecture sous forme de "pelote statistique" . . . . .	9
I.4	Evolution du module dynamique et de l'angle de perte en fonction de la température. . . . .	11
I.5	Différents types de macromolécules . . . . .	12
I.6	Représentation schématique des propriétés physiques et mécaniques fonction de la densité de réticulation de BOUCHEREAU . . . . .	13
I.7	Les différentes échelles de taille des charges . . . . .	15
I.8	Observation du caractère renforçant des charges. . . . .	16
I.9	Evolution de la réponse en cisaillement suivant le matériau pour un essai cyclique triangulaire d'amplitude 50% et de vitesse de déformation $0.15s^{-1}$ . . . . .	17
I.10	Modification de la trajectoire d'une courbe "virtuelle" de montée en charge après chargement cyclique d'un élastomère [GOVINDJEE et SIMO, 1991]. . . . .	18
I.11	Pourcentage de recouvrement de l'effet MULLINS pour un caoutchouc naturel vulcanisé en fonction de la température et du temps [MULLINS, 1947] . . . . .	19
I.12	Mesures de la rigidité et de l'angle de perte d'un élastomère chargé (isolant) montrant une forte dépendance à une variation d'amplitude, appelé effet PAYNE [SJÖBERG, 2002]. . . . .	20
II.1	Observation d'un agglomérat de silice de grande taille sur une éprouvette vierge de VHDS 1029. . . . .	24

II.2	Observation de l'évolution de $E'$ et $E''$ suivant la température. . . . .	25
II.3	Observation de l'évolution de $\tan \delta$ suivant la température. . . . .	26
II.4	Bilan des forces sur une pale d'hélicoptère. . . . .	28
II.5	Composition des vitesses. . . . .	29
II.6	Répartition des efforts de portance. . . . .	29
II.7	Pièces élastomériques d'un rotor d'hélicoptère, HUTCHINSON. . . . .	30
II.8	Inclinaison de la pale. . . . .	30
II.9	Position d'un adaptateur de fréquence sur un moyeu rotor d'hélicoptère. . . . .	31
II.10	Exemple d'hélicoptère possédant des pièces élastomériques, EUROCOPTER. . . . .	31
II.11	Coupe d'un adaptateur de fréquence classique. . . . .	32
III.1	Eprouvettes de traction et de double cisaillement. . . . .	37
III.2	Dimensions éprouvette haltère type H2 (mm). . . . .	38
III.3	Dimensions éprouvette de double cisaillement (mm). . . . .	38
III.4	Machines et enceintes thermiques utilisées dans cette campagne d'essais. . . . .	40
III.5	Observation de l'effet MULLINS à travers des essais de traction uniaxiale. . . . .	41
III.6	Présentation des grandeurs caractéristiques d'un essai cyclique stabilisé. . . . .	43
III.7	Stabilisation d'un essai cyclique en traction uniaxiale et en double cisaillement. . . . .	43
III.8	Observations d'essais monotones de montée en charge en traction uniaxiale pour différentes vitesses de sollicitation à température ambiante ( $\varepsilon_{max} = 100\%$ ). . . . .	44
III.9	Observation d'essais de relaxation en traction uniaxiale à température ambiante. . . . .	45
III.10	Observation de l'évolution du taux de relaxation suivant le temps à différentes températures en traction uniaxiale ( $\varepsilon_{max} = 50\%$ ). . . . .	46
III.11	Observation du temps de relaxation à différentes températures en traction uniaxiale ( $\varepsilon_{max} = 50\%$ ). . . . .	46
III.12	Evolution du taux de relaxation au bout de 660s suivant la température à différents échelons de déformation en traction uniaxiale. . . . .	47
III.13	Observation du taux de relaxation à différents échelons de déformation pour différentes températures en traction uniaxiale. . . . .	48
III.14	Observation du temps de relaxation à différents échelons de déformation pour différentes températures en traction uniaxiale. . . . .	49
III.15	Représentation schématique d'un essai de traction cyclique. . . . .	50
III.16	Observation de l'influence de la déformation maximale sur les essais de traction cyclique à température ambiante ( $\dot{\varepsilon} = \pm 0.05s^{-1}$ ). . . . .	50
III.17	Observation de l'évolution de la raideur et de la dissipation suivant la déformation maximale pour des essais de traction cyclique à température ambiante. . . . .	51

III.18 Observation de l'évolution de la déformation résiduelle suivant l'amplitude maximale et la vitesse de déformation. . . . .	52
III.19 Essai monotone de charge-décharge à basse vitesse de déformation en double cisaillement à température ambiante ( $\dot{\gamma} = 0.03s^{-1}$ ). . . . .	53
III.20 Evolution des déformation et contrainte résiduelles suivant l'amplitude de déformation maximale imposée. . . . .	54
III.21 Résultats d'essais de relaxation en double cisaillement à température ambiante. . . . .	54
III.22 Représentation schématique d'un essai de relaxation à amplitude progressive. . . . .	55
III.23 Evolution du taux et du temps de relaxation suivant la température en double cisaillement ( $\gamma_{max} = 50\%$ ). . . . .	56
III.24 Evolution du taux de relaxation au bout de 60s suivant la température et différents échelons de déformation en double cisaillement. . . . .	56
III.25 Observation de la contrainte normalisée à différents échelons de déformation pour différentes températures en double cisaillement. . . . .	57
III.26 Observation du temps de relaxation à différents échelons de déformation pour différentes températures en double cisaillement. . . . .	58
III.27 Représentation schématique d'un essai cyclique de type triangulaire à amplitude progressive. . . . .	59
III.28 Observation de l'influence de l'amplitude de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement à température ambiante tels que $\dot{\gamma} = \pm 0.3s^{-1}$ . . . . .	60
III.29 Evolution de la raideur et de la dissipation suivant l'amplitude de déformation pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\dot{\gamma} = \pm 0.3s^{-1}$ réalisés à différentes températures. . . . .	60
III.30 Observation de l'influence de la vitesse de déformation sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement à température ambiante tels que $\gamma_{max} = 50\%$ . . . . .	61
III.31 Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la vitesse de déformation pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\gamma_{max} = 50\%$ réalisés à différentes températures. . . . .	61
III.32 Observation de l'influence de la température sur les essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\gamma_{max} = 50\%$ et $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$ . . . . .	62
III.33 Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$ réalisés à différentes amplitudes de déformation. . . . .	62
III.34 Evolution de la raideur et de la dissipation suivant la température pour des essais cycliques triangulaires de double cisaillement tels que $\gamma_{max} = 50\%$ réalisés à différentes vitesses de déformation. . . . .	63
III.35 Représentation schématique d'un essai cyclique sinusoïdal. . . . .	63

III.36 Observation de l'influence de l'amplitude dynamique de déformation sur les essais cycliques sinusoïdaux à température ambiante tels que $f_r = 3Hz$ . . . . .	64
III.37 Observation de l'influence de la fréquence de sollicitation sur les essais cycliques sinusoïdaux à température ambiante tels que $\gamma_d = 25\%$ . . . . .	65
III.38 Représentation schématique d'un essai cyclique sinusoïdal avec pré-déformation statique. . . . .	66
III.39 Observation de l'influence de l'amplitude dynamique sur des essais cycliques sinusoïdaux avec pré-déformation tels que $f_r = 3Hz$ . . . . .	67
III.40 Observation de boucle d'hystérésis d'essais cycliques sinusoïdaux à deux harmoniques tels que $f_r = 1.5Hz$ et $f_{r2} = 2f_r = 3Hz$ . . . . .	68
III.41 Observation de boucle d'hystérésis d'essais cycliques sinusoïdaux à deux harmoniques tels que $f_r = 1.5Hz$ et $f_{r3} = 3f_r = 4.5Hz$ . . . . .	69
III.42 Observation de boucle d'hystérésis d'essais cycliques sinusoïdaux à trois harmoniques tels que $f_r = 1.5Hz$ , $f_{r2} = 2f_r = 3Hz$ et $f_{r3} = 3f_r = 4.5Hz$ . . . . .	70
III.43 Comparaison des résultats d'un essai cyclique sinusoïdal à deux harmoniques tel que $\gamma(t) = 0.25\sin(2\pi 1.5t) + 0.25\sin(2\pi 3t)$ et de ceux obtenus par combinaison de deux essais cycliques sinusoïdaux $\gamma(t) = 0.25\sin(2\pi 1.5t)$ et $\gamma(t) = 0.25\sin(2\pi 3t)$ . . . . .	71
III.44 Représentation schématique de l'évolution du module de rigidité et de l'angle de perte en fonction de la fréquence (Echelle logarithmique en fréquence). . . . .	73
III.45 Observation de l'influence de la fréquence de sollicitation sur les essais cycliques sinusoïdaux à température ambiante tels que $\gamma_d = 25\%$ (Echelle logarithmique en fréquence). . . . .	73
III.46 Variation du module dynamique et du déphasage en fonction de l'amplitude d'excitation sinusoïdale, pour deux mélanges. Cas d'un essai de cisaillement à 20 Hz extrait de [SAAD, 2003]. . . . .	74
III.47 Observation de l'influence de l'amplitude sur un élastomère silicone utilisé pour une ancienne génération d'adaptateurs de fréquence (Sollicitation sinusoïdale en double cisaillement de fréquence 10Hz à $T = 25^\circ C$ ) . . . . .	75
III.48 Evolution schématique d'une loi WLF pour un polymère et table de paramètres suivant le matériau issue de [BIKARD, 2002]. . . . .	76
IV.1 Caractère hyperélastique d'un élastomère en traction uniaxiale . . . . .	82
IV.2 Contribution de l'entropie et de l'énergie interne à la force de traction en fonction de l'élongation réalisée par MEYER et FERRI en 1935 extrait de (TREOLAR, 1975). . . . .	85
IV.3 Représentation de la cristallisation ou non sous contrainte par essai cyclique à amplitude croissante issue de [HARWOOD <i>et al.</i> , 1967]. . . . .	86

IV.4	Présentation des essais de montée en charge sur l'élastomère silicone VHDS 1029 en traction uniaxiale et en cisaillement simple ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\gamma} = 0.01s^{-1}$ ). . . . .	92
IV.5	Résultats d'identification de divers modèles hyperélastiques en traction uniaxiale. Confrontation des modèles ainsi identifiés face à un essais en double cisaillement. . . . .	94
IV.6	Résultats d'identification de divers modèles hyperélastiques en double cisaillement. Confrontation des modèles ainsi identifiés face à un essais en traction uniaxiale. . . . .	94
IV.7	Résultats d'identification de divers modèles hyperélastiques réalisée simultanément sur des essais de traction uniaxiale et de double cisaillement. . . . .	95
IV.8	Représentation de la fonctionnelle d'énergie libre en fonction des dilatations principales ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) obtenue après identification des paramètres sur un essai de traction uniaxiale. . . . .	97
IV.9	Représentation de la fonctionnelle d'énergie libre en fonction des dilatations principales ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) obtenue après identification des paramètres sur un essai de double cisaillement. . . . .	98
IV.10	Représentation de la fonctionnelle d'énergie libre en fonction des dilatations principales ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) obtenue après identification des paramètres couplée sur un essai de traction uniaxiale et un essai de double cisaillement. . . . .	99
V.1	Energies libres spécifiques et pseudo-potentiels de dissipation associés aux modèles rhéologiques viscoélastiques usuels. . . . .	111
V.2	Modèles rhéologiques élastoplastiques usuels dans le cas monodimensionnel. . . . .	117
V.3	Réponse académique du modèle de SAINT-VENANT généralisé à un essai de montée en charge dans le cas monodimensionnel . . . . .	119
V.4	Passage du modèle discret au modèle continu de RAMRAKHYANI et SMITH [2004] dans le cas monodimensionnel en petites déformations pour $N = 3$ . . . . .	120
V.5	Représentation de la réaction tangentielle en fonction du déplacement des lois de COULOMB classique et pénalisée . . . . .	121
V.6	Deux types de mécanismes d'endommagement au sein d'un V.E.R. extraits de [GOVINDJEE et SIMO, 1991] . . . . .	123
V.7	Apparition et évolution de cavités en fonction de la déformation du V.E.R. issue de [BIKARD, 2002] . . . . .	123
V.8	Représentation graphique en contrainte-déformation du modèle de MIEHE [1995] . . . . .	127
V.9	Modèle rhéologique étendu généralisé aux grandes déformations . . . . .	131
V.10	Représentation graphique des grandeurs caractéristiques d'une sollicitation harmonique pour un matériau viscoélastique. . . . .	132

V.11 Représentation schématique de l'évolution suivant la pulsation du module dynamique et de la dissipation globale des modèles viscoélastiques classiques en petites déformations pour une sollicitation sinusoïdale. . . . .	133
V.12 Représentation graphique des grandeurs caractéristiques d'une sollicitation harmonique pour un matériau élastoplastique écrouissable. . . . .	137
V.13 Représentation schématique de l'évolution suivant l'amplitude dynamique du module dynamique et de la dissipation globale du modèle élastoplastique écrouissable ② en petites déformations pour une sollicitation sinusoïdale. . . . .	137
V.14 Essai cyclique de double cisaillement de type sinusoïdal tel que $\gamma_d = 25\%$ et $f_r = 10Hz$ utilisé comme référence pour l'identification. . . . .	140
V.15 Algorithme itératif de minimisation développé par BOUKAMEL <i>et al.</i> [2001]. . . .	141
V.16 Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis des modèles unitaires classiques généralisés aux grandes déformations et identifiés sur un essai cyclique sinusoïdal tel que $\gamma_d = 25\%$ et $f_r = 10Hz$ . . . . .	143
V.17 Confrontation modèles/expérience de l'évolution suivant la fréquence du module dynamique et de la dissipation globale des modèles unitaires en grandes déformations identifiés sur un essai cyclique sinusoïdal tel que $\gamma_d = 25\%$ et $f_r = 10Hz$ . . . .	144
V.18 Confrontation modèle/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle de MAXWELL généralisé avec $N = 3$ en grandes déformations identifié simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux pour une amplitude de sollicitation donnée $\gamma_d = 25\%$ à diverses fréquences telles que $f_{r1} = 3Hz$ , $f_{r2} = 6Hz$ , $f_{r3} = 10Hz$ , $f_{r4} = 15Hz$ et $f_{r5} = 20Hz$ . L'erreur cumulée est alors de 63.73% qui revient à une moyenne de 12.74%. . . . .	145
V.19 Confrontation modèle/expérience de l'évolution suivant la fréquence du module dynamique et de la dissipation globale du modèle de MAXWELL généralisé avec $N = 3$ en grandes déformations identifié simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux pour une amplitude de sollicitation donnée $\gamma_d = 25\%$ à diverses fréquences telles que $f_{r1} = 3Hz$ , $f_{r2} = 6Hz$ , $f_{r3} = 10Hz$ , $f_{r4} = 15Hz$ et $f_{r5} = 20Hz$ . . . .	146
V.20 Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis des modèles unitaires classiques généralisés aux grandes déformations et identifiés sur un essai cyclique sinusoïdal tel que $\gamma_d = 25\%$ et $f_r = 10Hz$ . . . . .	148
V.21 Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle de MAXWELL généralisé avec $N = 3$ en grandes déformations et identifiés simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux tels que $\gamma_d = 25\%$ et $f_r = 3Hz$ , $f_r = 6Hz$ , $f_r = 10Hz$ , $f_r = 15Hz$ et $f_r = 20Hz$ . L'erreur cumulée est alors de 57.57% qui revient à une moyenne de 11.51%. . . . .	150

V.22 Confrontation modèle/expérience en terme de boucle d'hystérésis du modèle élastoplastique écrouissable ② en grandes déformations identifié sur un essai cyclique sinusoïdal tel que $f_r = 3Hz$ et $\gamma_{d_2} = 25\%$ (Erreur=8.16%). . . . .	151
V.23 Confrontation modèle/expérience de l'évolution suivant l'amplitude de déformation du module de rigidité et de la dissipation globale du modèle élastoplastique écrouissable de type ② en grandes déformations identifié simultanément sur un essai cyclique sinusoïdal tel que $f_r = 3Hz$ et $\gamma_d = 25\%$ . . . . .	152
V.24 Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle élastoplastique écrouissable de type ② en grandes déformations identifié sur un essai cyclique sinusoïdal tel que $f_r = 3Hz$ et $\gamma_{d_2} = 25\%$ . Observation de la réponse du modèle ainsi identifié à diverses amplitudes de déformation $\gamma_{d_1} = 12.5\%$ et $\gamma_{d_3} = 50\%$ . . .	152
V.25 Confrontation modèle/expérience de l'évolution suivant l'amplitude de déformation du module de rigidité et de la dissipation globale du modèle de SAINT-VENANT généralisé avec $N = 3$ en grandes déformations identifié simultanément sur trois essais cycliques sinusoïdaux tels que $f_r = 3Hz$ et $\gamma_{d_1} = 12.5\%$ , $\gamma_{d_2} = 25\%$ et $\gamma_{d_3} = 50\%$ . . . . .	153
V.26 Confrontation modèles/expérience de la boucle d'hystérésis du modèle de SAINT-VENANT généralisé avec $N = 3$ en grandes déformations identifié simultanément sur trois essais cycliques sinusoïdaux tels que $f_r = 3Hz$ et $\gamma_{d_1} = 12.5\%$ , $\gamma_{d_2} = 25\%$ et $\gamma_{d_3} = 50\%$ (Erreur moyenne=11.25%). . . . .	154
V.27 Illustration rhéologique du modèle élastique-viscoélastique-plastoélastique de [MIEHE et KECK, 2000] . . . . .	156
VI.1 Généralisation d'un modèle de MAXWELL généralisé (à $N$ branches) à un modèle statistique possédant une infinité de branches . . . . .	160
VI.2 Modèle statistique hyper-visco-élastique discret. . . . .	161
VI.3 Modèle statistique hyper-visco-élastique continu. . . . .	162
VI.4 Représentation schématique des évolutions de $\tau(\omega)$ suivant la variable aléatoire $\omega$ . . . . .	164
VI.5 Observation schématique de la fonctionnelle de pondération $\mathcal{P}(\omega)$ suivant la variable aléatoire $\omega$ . . . . .	165
VI.6 Confrontation modèle SHV/expérience de boucles d'hystérésis issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d'identification. . . . .	166
VI.7 Confrontation modèle SHV/expérience des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d'identification. . . . .	167



VI.8 Confrontation modèle SHV/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude dynamique pour une sollicitation cyclique sinusoïdale. . . . .	168
VI.9 Association en parallèle d'une branche élastoplastique de SAINT-VENANT au modèle statistique hyper-viscoélastique . . . . .	169
VI.10 Pré-identification des paramètres du modèle hyper-élastoplastique écrouissable sur un essai de montée en charge quasi-statique ( <i>Erreur</i> = 2.5%). . . . .	171
VI.11 Ajustement des paramètres du modèle hyper-élastoplastique sur l'élasticité différée (points bleus) obtenue avec trois essais de relaxation d'échelons de déformation de 12.5%, 25% et 50%. . . . .	172
VI.12 Confrontation modèle SHVP/expérience des boucles d'hystérésis issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d'identification. . . . .	172
VI.13 Confrontation modèle SHVP/expérience des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé issues des sollicitations cycliques triangulaires à amplitude progressive utilisées comme références d'identification. . . . .	173
VI.14 Confrontation modèle SHVP/expérience de l'évolution du module dynamique et de la dissipation globale suivant la fréquence et l'amplitude pour une sollicitation cyclique sinusoïdale. . . . .	174
VI.15 Confrontation modèle SHVP/expérience pour des sollicitations cycliques sinusoïdales à amplitude dynamique donnée ( $\gamma_d = 25\%$ ) pour différentes fréquences (de 3Hz à 20Hz). . . . .	176
VI.16 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.05 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$ (Ecart=7.41%). . .	177
VI.17 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 3t)$ (Ecart=9.04%). .	178
VI.18 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$ (Ecart=5.98%). .	178
VI.19 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 3t)$ (Ecart=9.74%). . .	178
VI.20 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.05 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 4.5t)$ (Ecart=7.64%). .	179
VI.21 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 4.5t)$ (Ecart=7.8%).	179
VI.22 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.125 \sin(2\pi 1.5t) + 0.25 \sin(2\pi 4.5t)$ (Ecart=7.94%).	179

VI.23 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 2 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.25 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 4.5t)$ (Ecart=6.94%).	180
VI.24 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation sinusoïdale à 3 harmoniques telle que $\gamma(t) = 0.05 \sin(2\pi 1.5t) + 0.125 \sin(2\pi 3t) + 0.25 \sin(2\pi 4.5t)$ (Ecart=11.23%).	180
VI.25 Confrontation modèle SHVP/expérience pour une sollicitation cyclique sinusoïdale avec pré-déformation telle que $\gamma_d = 0.05, 0.125$ et $0.25$ .	181
VI.26 Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant $C_1$ .	183
VI.27 Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant $A_p$ .	183
VI.28 Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant $\chi$ .	183
VI.29 Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant $G_0$ .	184
VI.30 Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant $\eta_\infty$ .	185
VI.31 Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant $\Omega$ .	186
VI.32 Observation de l'évolution des grandeurs caractéristiques suivant $\omega_0$ .	186
VI.33 Vision "macro-meso" d'un élastomère chargé.	187
VI.34 Interprétation rhéologique des trois phases en présence.	187
VI.35 Interprétation physique du modèle statistique hyper-visco-plastique discret	188
VI.36 Pré-identification des paramètres du modèle hyper-élastoplastique écrouissable sur un essai de montée en charge quasi-statique à différentes températures.	190
VI.37 Ajustement des paramètres du modèle hyper-élastoplastique sur l'élasticité différée (points bleus) obtenue avec trois essais de relaxation d'échelons de déformation de 12.5%, 25% et 50% à différentes températures.	192
VI.38 Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que $\gamma_{max} = 12.5\%$ et $\dot{\gamma} = 3s^{-1}$ .	193
VI.39 Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que $\gamma_{max} = 25\%$ et $\dot{\gamma} = 3s^{-1}$ .	194
VI.40 Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que $\gamma_{max} = 12.5\%$ et $\dot{\gamma} = 10s^{-1}$ .	195
VI.41 Confrontation modèle/expérience à différentes températures des boucles d'hystérésis à l'état stabilisé pour une sollicitation cyclique triangulaire telle que $\gamma_{max} = 25\%$ et $\dot{\gamma} = 10s^{-1}$ .	196
VI.42 Evolution de $E^*$ et $\Phi_{cycle}$ calculée via le modèle SHVP suivant la fréquence ( $\gamma_d = 25\%$ ) et l'amplitude ( $f_r = 3Hz$ ) pour une sollicitation sinusoïdale à diverses températures.	197

VI.43	Evolution du paramètre hyperélastique global suivant la température. . . . .	199
VI.44	Evolution des paramètres statistique hyper-visco-élastique suivant la température. . . . .	199
VI.45	Evolution des paramètres statistique hyper-élastoplastique suivant la température. . . . .	199
VI.46	Evolution des paramètres du modèle SHVP en fonction de la température. . . . .	200
A.1	Système de configurations. . . . .	233
A.2	Description d'une décomposition polaire [SIDOROFF, 1982]. . . . .	235
A.3	Etat de contrainte dans les différentes configurations. . . . .	237
A.4	Conditions limites dans les configurations initiale et actuelle. . . . .	238
A.5	Milieu avec une configuration intermédiaire [SIDOROFF, 1973]. . . . .	245
A.6	Milieu avec $N$ configurations intermédiaires extrait de [MÉO, 2000]. . . . .	246
A.7	Quelques exemples de modèles rhéologiques à un seul état intermédiaire. . . . .	249
A.8	Généralisations à un modèle rhéologique étendu composé de $N$ branches. . . . .	249
A.9	Conditions limites thermiques. . . . .	251
B.1	Exemple de déformation d'un cylindre en traction simple sur son axe. . . . .	257
B.2	Exemple de déformation d'un cube d'arrêtes unité en cisaillement simple selon $\vec{e}_1$ . . . . .	258
C.1	Phénomène d'adoucissement cyclique . . . . .	266
C.2	Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un solide élastique parfait . . . . .	268
C.3	Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un fluide visqueux . . . . .	269
C.4	Modèle de MAXWELL . . . . .	269
C.5	Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un solide visco-élastique . . . . .	270
C.6	Modèle de KELVIN-VOIGT . . . . .	270
C.7	Modèle de POYNTING-THOMSON . . . . .	271
C.8	Modèle de ZENER . . . . .	272
C.9	Modèle de MAXWELL généralisé . . . . .	273
C.10	Réponses académiques à l'essai caractéristique d'écrouissage pour un solide élastique parfaitement plastique . . . . .	275
C.11	Modèle de SAINT-VENANT . . . . .	275
C.12	Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un solide élastoplastique écrouissable . . . . .	276
C.13	Modèle de PRAGER . . . . .	277
C.14	Modèle élastoplastique écrouissable ① [SUQUET, 1982] . . . . .	277
C.15	Modèle de SAINT-VENANT généralisé [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1996] . . . . .	279
C.16	Modèle de BINGHAM . . . . .	279
C.17	Modèle de BINGHAM-NORTON . . . . .	280
C.18	Modèle de BINGHAM généralisé . . . . .	281

---

C.19 Hystérésis de forme elliptique . . . . .	285
---	-----





---

## Liste des tableaux

I.1	Quelques dates dans l'histoire du caoutchouc . . . . .	8
I.2	Catégories d'élastomères . . . . .	10
I.3	Degré de renforcement de différents types de charges [LEMOINE, 2001] . . . . .	14
I.4	Comparaison du module dynamique et de la dissipation globale pour des caoutchoucs silicones CQXB avec et sans charge produits par la société SMAC et calculés pour un essai cyclique triangulaire d'amplitude 50% et de vitesse de déformation $0.15s^{-1}$ . . . . .	17
II.1	Désignation des caoutchoucs silicones les plus répandus dans la littérature. . . . .	23
II.2	Représentation générale des propriétés des silicones. . . . .	23
II.3	Quelques exemples d'applications industrielles utilisant les élastomères pour leur capacité amortissante. . . . .	27
II.4	Enveloppe des sollicitations des adaptateurs des rotors principal et arrière. . . . .	32
III.1	Contrainte et déformation mesurée suivant l'essai réalisé. . . . .	39
III.2	Taux de relaxation suivant l'échelon de déformation en traction uniaxiale. . . . .	45
III.3	Paramètres identifiés d'une série de PRONY sur un essai de relaxation en traction uniaxiale. . . . .	45
III.4	Evolution des caractéristiques d'un essai de traction cyclique suivant la déformation maximale à température ambiante ( $\dot{\epsilon} = \pm 0.05s^{-1}$ ). . . . .	51

III.5 Evolution de la déformation résiduelle suivant la vitesse de déformation pour des essais de traction cyclique à température ambiante ( $\varepsilon_{max} = 100\%$ ). . . . .	51
III.6 Tableau des déformations et contraintes résiduelles suivant l'amplitude maximale de déformation. . . . .	53
III.7 Taux de relaxation à 1200s suivant l'échelon de déformation en double cisaillement.	55
III.8 Paramètres identifiés d'une série de PRONY sur un essai de relaxation en double cisaillement. . . . .	55
III.9 Fréquences moyennes (Hz) associées au couple amplitude dynamique et taux de déformation pour des éprouvettes de double cisaillement. . . . .	59
III.10 Valeur de la contrainte moyenne suivant l'amplitude dynamique d'un essai cyclique sinusoïdal avec pré-déformation statique. . . . .	67
IV.1 Présentation des principales notations utilisées au CHAPITRE IV. . . . .	81
IV.2 Erreurs relatives obtenues par identification des modèles hyperélastiques sur des essais de montée en charge en traction uniaxiale ou en double cisaillement. . . . .	93
IV.3 Paramètres des modèles hyperélastiques identifiés simultanément sur des essais de traction uniaxiale et de double cisaillement . . . . .	95
IV.4 Erreurs relatives obtenues par identification des modèles hyperélastiques simultanément en traction uniaxiale et en double cisaillement. . . . .	95
V.1 Table non exhaustive des principaux exemples de lois de comportements héréditaires en grandes déformations. . . . .	107
V.2 Tableau représentatif du type de mémoire selon les matériaux. . . . .	109
V.3 Paramètres choisis pour la représentation schématique des modèles viscoélastiques classiques. . . . .	133
V.4 Résultats d'identification des modèles usuels généralisés aux grandes déformations à partir d'un essai cyclique sinusoïdal tel que $\gamma_d = 25\%$ et $f_r = 10Hz$ . . . . .	142
V.5 Résultats d'identification du modèle de MAXWELL généralisé avec $N = 3$ en grandes déformations réalisée simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux tels que, $\gamma_d = 25\%$ , et $f_{r1} = 3Hz$ , $f_{r2} = 6Hz$ , $f_{r3} = 10Hz$ , $f_{r4} = 15Hz$ et $f_{r5} = 20Hz$ . . . . .	144
V.6 Type d'énergie libre selon le modèle de comportement viscoélastique . . . . .	147
V.7 Résultats d'identification des modèles unitaires enrichis à partir d'un essai cyclique sinusoïdal tel que $\gamma_d = 25\%$ et $f_r = 10Hz$ . . . . .	147
V.8 Résultats d'identification des paramètres de la branche principale enrichie du modèle de MAXWELL généralisé réalisée simultanément sur cinq essais cycliques sinusoïdaux tels que $\gamma_d = 25\%$ et $f_{r1} = 3Hz$ , $f_{r2} = 6Hz$ , $f_{r3} = 10Hz$ , $f_{r4} = 15Hz$ et $f_{r5} = 20Hz$ . . . . .	149

V.9	Résultats d'identification du modèle élastoplastique écrouissable ② en grandes déformations à partir d'un essai cyclique sinusoïdal tel que $f_r = 3Hz$ et $\gamma_{d_2} = 25\%$ .	151
V.10	Résultats d'identification du modèle de SAINT-VENANT généralisé avec $N = 3$ en grandes déformations réalisée simultanément sur trois essais cycliques sinusoïdaux tels que $f_r = 3Hz$ et $\gamma_{d_1} = 12.5\%$ , $\gamma_{d_2} = 25\%$ et $\gamma_{d_3} = 50\%$ .	153
VI.1	Résultats d'identification du modèle SHV réalisée simultanément sur deux essais cycliques triangulaires à amplitude progressive (12.5% et 25%) avec des vitesses de déformation différentes ( $3s^{-1}$ et $10s^{-1}$ ).	166
VI.2	Paramètres du modèle statistique hyper-visco-plastique identifiés aux différentes étapes de la stratégie d'identification.	171
VI.3	Erreurs relatives obtenues lors de l'étape d'identification finale.	172
VI.4	Ecarts relatifs obtenus pour des sollicitations cycliques sinusoïdales avec $\gamma_d = 25\%$ à l'état stabilisé.	175
VI.5	Ecarts relatifs obtenus pour des sollicitations sinusoïdales à 2 harmoniques.	177
VI.6	Ecarts relatifs obtenus pour des sollicitations cycliques sinusoïdales avec pré-déformation tel que $\gamma(t) = \gamma_s + \gamma_d \sin(2\pi 3t)$	181
VI.7	Paramètres identifiés lors de l'étape initiale pour différentes températures.	191
VI.8	Paramètres ajustés lors de l'étape intermédiaire pour différentes températures.	191
VI.9	Paramètres identifiés lors de l'étape finale pour différentes températures.	191
VI.10	Coefficients utilisés pour les lois d'évolution de chaque paramètre suivant la température.	198
A.1	Tableau des égalités définissant l'objectivité d'une grandeur suivant la description extrait de [LAHELLEC, 2001]	240
A.2	Signification physique des termes de l'équation A.71.	252
C.1	Tableau récapitulatif des éléments analogiques de base	262
C.2	Essai caractéristique type chargement monotone	264
C.3	Essai caractéristique de fluage	264
C.4	Essai caractéristique de relaxation	265
C.5	Essai caractéristique de charge-décharge	265
C.6	Essai caractéristique de type cyclique	267
C.7	Quelques exemples d'utilisation des modèles rhéologiques dans la recherche de fonction de relaxation en petites déformations.	274





# Thermodynamique appliquée aux grandes déformations

## Avertissement :

L'objet de cette annexe est la mise en place d'un cadre thermodynamique, qui servira de référence tout au long de ce travail. Les formulations qui en résultent, doivent être suffisamment générales pour prendre en compte divers phénomènes mécaniques tels que l'hyperélasticité, la plasticité, la viscoélasticité, l'incompressibilité ou l'endommagement et ce, en grandes déformations.

La rédaction de cette annexe a été largement inspirée par le travail de MÉO [2000]. Nous invitons donc le lecteur désirant connaître plus de détails à consulter cet ouvrage.

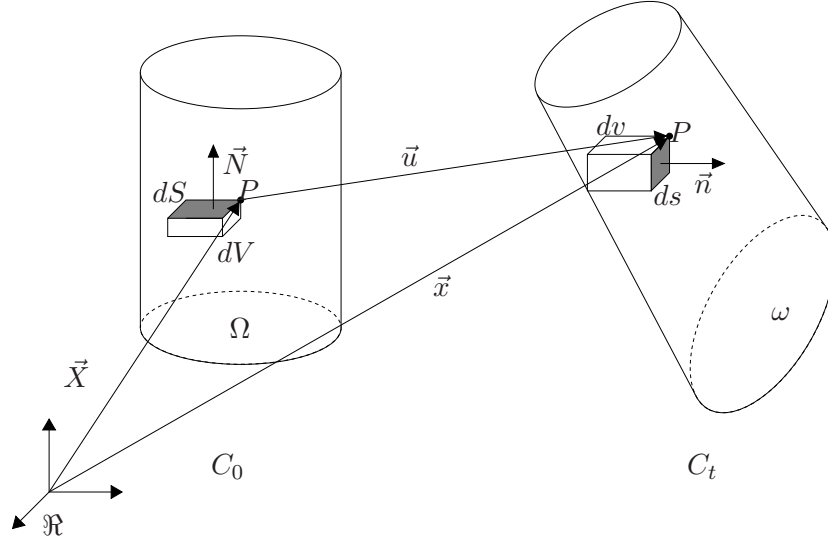
- Sont donc présentées, les différentes grandeurs nécessaires à la formulation d'un problème en grandes déformations.
- Puis nous écrivons, dans ce cadre, les deux principes fondamentaux de la thermodynamique.
- Enfin, nous introduisons la notion d'état intermédiaire, notion majeure pour les développements réalisés dans ce travail. Un certain nombre de lois, dont la validité est vérifiée par des critères d'objectivité, sont alors déduites.

En résumé, ce qui suit explicite les hypothèses de travail et délimite le cadre de cette étude.



## A.1 Formalisme des grandes déformations

### A.1.1 Description du mouvement

FIGURE A.1 – *Système de configurations.*

Soit un solide  $S$  évoluant dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Il occupe le domaine  $\Omega$  dans la configuration  $C_0$  que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant  $t$  le domaine  $\omega$  dans la configuration  $C_t$  (*cf.* FIG. A.1).

En mécanique des solides, la configuration initiale du solide avant déformation est souvent choisie comme configuration de référence [SIDOROFF, 1982]. On peut définir une fonction  $\mathcal{K}$ , qui à la position  $\vec{X}$  d'une particule  $P$  dans  $C_0$ , associe  $\vec{x}$  sa position dans  $C_t$  :

$$\mathcal{K} : \begin{cases} C_0 & \longrightarrow & C_t \\ \vec{X} & \longmapsto & \vec{x} = \mathcal{K}(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

En introduisant  $\vec{u}$ , le vecteur déplacement, l'équation A.1 peut se mettre sous une forme équivalente :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t). \quad (\text{A.2})$$

### A.1.2 Expression des déformations

En vue de définir la transformation locale au voisinage de la particule  $P$ , on introduit classiquement l'application linéaire tangente  $\bar{\bar{F}}$  associée à  $\mathcal{K}$ . Considérant un vecteur  $d\vec{X}$  dans la configuration initiale, son image  $d\vec{x}$  dans la configuration actuelle s'obtient par la relation :

$$d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}, \quad (\text{A.3})$$

et de manière indicielle, en utilisant la relation A.2 :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

$\bar{\bar{F}}$  (appelé aussi gradient de la transformation) traduit le "transport" de  $C_0$  vers  $C_t$ . L'application linéaire tangente est localement inversible et conserve l'orientation, par conséquent :

$$J = \det(\bar{\bar{F}}) > 0. \quad (\text{A.5})$$

Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume  $dV$  ou de surface  $\vec{N}dS$  de  $C_0$  à leurs images respectives  $dv$  et  $\vec{n}ds$  dans  $C_t$ , se déclinent comme suit :

$$dv = JdV, \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{n}ds = \begin{cases} (\text{Cof}\bar{\bar{F}}) \cdot \vec{N}dS \\ J\bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Le tenseur gradient de la transformation  $\bar{\bar{F}}$  décrit le mouvement local autour d'une particule. Il englobe aussi bien les rotations rigides que les déformations pures et ne constitue pas alors une bonne mesure des déformations. Aussi, faut-il utiliser des mesures qui ne rendent compte que des changements de forme du milieu c'est à dire qui ne traduisent que les variations de longueur et d'angle, soit pour deux vecteurs, les variations de leur produit scalaire.

Dès lors, on peut définir plusieurs déformations :

- soit par une définition directe qui détermine les tenseurs de dilatations ou de déformation directement à partir de  $\bar{\bar{F}}$ . C'est le cas des formulations classiques de déformations réalisées en configuration initiale et actuelle,
- soit par décomposition de  $\bar{\bar{F}}$  telle que la décomposition polaire, utilisée ici, qui ne dépend que des configurations initiale et actuelle ou bien d'autre telle que par exemple la décomposition corotationnelle qui dépend de l'histoire des déformations.

### A.1.2.a Description lagrangienne des déformations

On considère  $d\vec{X}$  et  $d\vec{Y}$  deux vecteurs de la configuration  $C_0$ , devenant  $d\vec{x}$  et  $d\vec{y}$  après déformation (dans  $C_t$ ). On a :

$$\begin{aligned} d\vec{x} \cdot d\vec{y} &= (\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}) \cdot (\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{Y}) \\ &= d\vec{X} \cdot \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{Y} \end{aligned}$$

On note alors  $\bar{\bar{C}}$  le tenseur des dilatations ou tenseur de CAUCHY-GREEN droit défini par :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}}. \quad (\text{A.8})$$

La variation de produit scalaire s'écrit alors telle que :

$$\vec{dx} \cdot \vec{dy} - d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{X} \cdot \left( \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{1}} \right) \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{A.9})$$

On note ainsi  $\bar{\bar{E}}$  le tenseur des déformations de GREEN-LAGRANGE défini par :

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{1}}). \quad (\text{A.10})$$

### A.1.2.b Description eulérienne des déformations

On définit alors de la même manière, dans la configuration actuelle, le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche comme étant :

$$\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^T \quad \text{tel que} \quad d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = \vec{dx} \cdot \bar{\bar{B}}^{-1} \cdot \vec{dy}. \quad (\text{A.11})$$

Le tenseur d'EULER-ALMANZI  $\bar{\bar{A}}$  traduit alors la variation de produit scalaire, il est défini par :

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{B}}^{-1}). \quad (\text{A.12})$$

### A.1.2.c Décomposition polaire du tenseur gradient de transformation

Une autre manière d'introduire la notion de déformation est d'utiliser l'unique décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}$  (car  $\det(\bar{\bar{F}}) > 0$ ) :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{V}} \cdot \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{U}}, \quad (\text{A.13})$$

avec  $\bar{\bar{V}}$ ,  $\bar{\bar{U}}$  respectivement les tenseurs des déformations pures droit (en description lagrangienne) et gauche (en description eulérienne) – tous deux sont symétriques définis positifs – et  $\bar{\bar{R}}$  le tenseur de rotation. La transformation est ainsi décomposée en deux étapes. Le passage de  $C_0$  à  $C_t$  s'effectue par une rotation puis une déformation, ou l'inverse (*cf.* FIG. A.2).

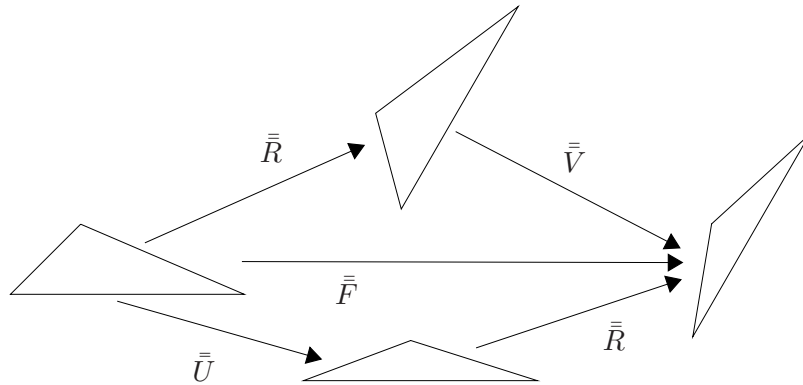


FIGURE A.2 – Description d'une décomposition polaire [SIDOROFF, 1982].

### A.1.3 Vitesse de déformation

Pour caractériser les vitesses, on introduit le vecteur  $\vec{v}$  comme étant la dérivée par rapport au temps de  $\vec{x}(\vec{X}, t)$ . Si bien que pour  $d\vec{x}$  de  $C_t$ , on a :

$$d\vec{v} = d\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{L}} \cdot d\vec{x} \quad (\text{A.14})$$

L'équation A.14 montre bien que  $\dot{\vec{F}}$  mesure la vitesse de déformation entre la configuration initiale et celle actuelle et il est donc possible de définir le tenseur gradient des vitesses  $\bar{\bar{L}} = \dot{\vec{F}} \cdot \vec{F}^{-1}$ .

La décomposition de  $\bar{\bar{L}}$  en une partie symétrique et partie antisymétrique représentant respectivement la vitesse de déformation et le rotationnel du champ des vitesses permet de définir les tenseurs eulériens taux de déformation  $\bar{\bar{D}}$  et de rotation  $\bar{\bar{W}}$  de la transformation.

$$\bar{\bar{L}} = \bar{\bar{D}} + \bar{\bar{W}} \text{ avec } \begin{cases} \bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{L}} + \bar{\bar{L}}^T), \\ \bar{\bar{W}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{L}} - \bar{\bar{L}}^T). \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Si  $d\vec{x}$  et  $d\vec{y}$  sont deux vecteurs de  $C_t$ , il nous faut exprimer la dérivée par rapport au temps de leur produit scalaire. On a, en configuration eulérienne :

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \cdot \vec{y}) = 2d\vec{x} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot d\vec{y}. \quad (\text{A.16})$$

On obtient de la même manière en configuration lagrangienne, avec  $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \vec{F}$  le tenseur taux de déformation lagrangien confirmant que  $\dot{\vec{E}}$  et  $\bar{\bar{D}}$  sont les transportés l'un de l'autre :

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \cdot \vec{y}) = 2d\vec{X} \cdot \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{Y}. \quad (\text{A.17})$$

### A.1.4 Description des efforts

Trois descriptions peuvent être utilisées pour définir l'état de contrainte dans un solide, suivant que l'on considère les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle ( $d\vec{t}$ , voir FIG. A.3) à travers un élément de surface déformé ( $\vec{n}ds$ ) ou non déformé ( $\vec{N}dS$ ), ou encore le transport des efforts de cohésion ( $d\vec{T}$ ) à travers un élément de surface non déformé ( $\vec{n}ds$ ). Ces approches définissent respectivement les descriptions **eulérienne**, **mixte** et **lagrangienne** [MÉO, 2000].

#### A.1.4.a Description eulérienne

Comme nous l'avons expliqué précédemment, on considère les efforts intérieurs de cohésion exercés par une partie du solide sur l'autre, à travers un élément de surface  $\vec{n}ds$ . On définit  $\bar{\bar{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de CAUCHY de façon analogue aux petites déformations comme étant :

$$d\vec{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}ds. \quad (\text{A.18})$$

$\bar{\bar{\sigma}}$  (tenseur symétrique) représente donc les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée et par unité de surface déformée.

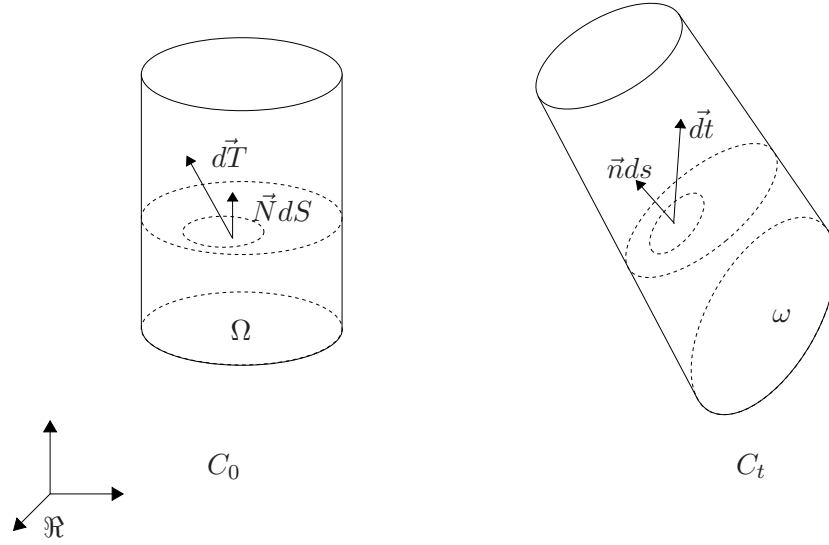


FIGURE A.3 – Etat de contrainte dans les différentes configurations.

#### A.1.4.b Description mixte

Dans ce cas, on peut également lier les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle,  $\vec{dt}$ , au transport de l'élément de surface  $\vec{n}ds$  dans la configuration initiale noté  $\vec{N}dS$ .

$$\vec{dt} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot J \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \vec{N}dS,$$

Ainsi, le tenseur des contraintes associé à cette description est  $\bar{\bar{\pi}}$  (tenseur non symétrique), le premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\pi}} = J \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}, \\ \vec{dt} = \bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{N}dS. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Tout comme  $\bar{\bar{F}}$ ,  $\bar{\bar{\pi}}$  n'est ni lagrangien, ni eulérien. On parle alors de description mixte. Physiquement, il représente les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée par unité de surface non déformée.

#### A.1.4.c Description lagrangienne

L'obtention d'une description complètement lagrangienne de l'état de contrainte nécessite le transport de l'effort réel de cohésion  $\vec{dt}$  dans la configuration initiale non-déformée tel que :

$$\vec{dT} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \vec{dt} \quad (\text{A.20})$$



On introduit ainsi  $\bar{\bar{S}}$  (tenseur qui n'a aucune signification physique mais présente la particularité d'être symétrique) le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF tel que :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = J\bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T} = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}}, \\ d\vec{T} = \bar{\bar{S}} \cdot \vec{N} dS. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

### A.1.5 Equations d'équilibre statique

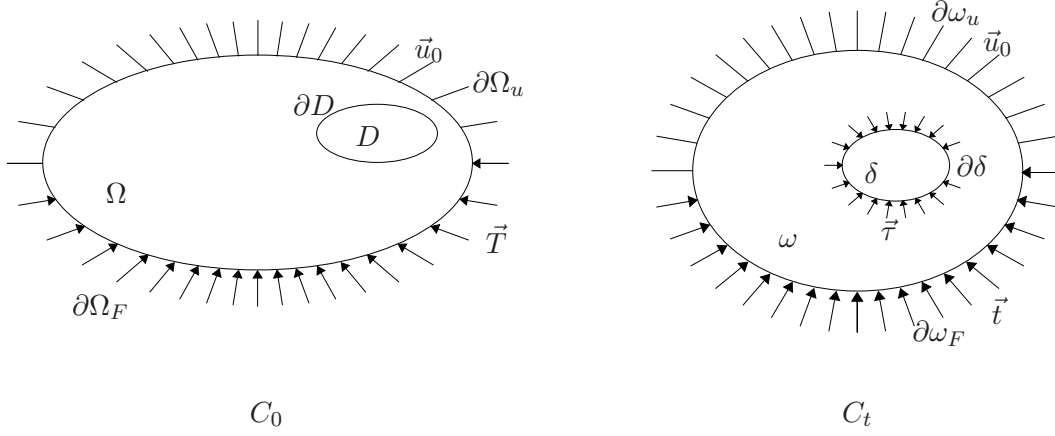


FIGURE A.4 – Conditions limites dans les configurations initiale et actuelle.

On définit dans la configuration actuelle (*cf.* FIG. A.4) par  $\partial\omega$  la surface du domaine  $\omega$ ,  $\partial\omega_u$  et  $\partial\omega_F$  respectivement les sous domaines de  $\partial\omega$  sur lesquels on applique un déplacement imposé  $\vec{u}_0$  ou une densité surfacique de force par unité de surface déformée  $\vec{t}$  tels que  $\partial\omega_u \cup \partial\omega_F = \partial\omega$  et  $\partial\omega_u \cap \partial\omega_F = \emptyset$ ,  $\delta$  un élément de volume dans la configuration déformée et  $\vec{\tau}$  les efforts de cohésion exercés à travers l'élément de surface  $\partial\delta$ .

Dans la configuration initiale,  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_u$ ,  $\partial\Omega_F$ ,  $D$  et  $\partial D$  sont respectivement les transportés de  $C_t$  vers  $C_0$  par l'intermédiaire de  $\bar{\bar{F}}^{-1}$  de  $\partial\omega$ ,  $\partial\omega_u$ ,  $\partial\omega_F$ ,  $\delta$  et  $\partial\delta$ .  $\vec{T}$  est la densité surfacique de force exprimée dans  $C_0$ .

#### A.1.5.a Formulation eulérienne

L'écriture de la **conservation de la quantité de mouvement**, traduisant dans la configuration actuelle, l'équilibre du sous domaine  $\delta$ , donne :

$$\int_{\partial\delta} \vec{\tau} ds + \int_{\delta} \rho \vec{f} dv = \vec{0}, \quad (\text{A.22})$$

où  $\rho$  est la densité de masse par unité de volume dans la configuration actuelle et  $\vec{f}$  la densité massique de force.

On obtient dans la configuration actuelle, en utilisant le théorème de la divergence et après avoir

injecté la relation A.18 dans l'équation A.22, l'équation d'équilibre associée aux conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \bar{\sigma} + \rho \bar{f} = \vec{0} & \text{sur } \omega \\ \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{t} & \text{sur } \partial\omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\omega_u \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

#### A.1.5.b Formulation lagrangienne

Si on note  $\rho_0$  la densité de masse par unité de volume dans la configuration de référence, l'équation de la **conservation de la masse** et la relation A.6 nous donnent :

$$\rho dv = \rho_0 dV \text{ soit } \rho_0 = J\rho. \quad (\text{A.24})$$

En se servant des lois de transformation A.6 et A.7 pour changer les domaines d'intégration de A.22, il est alors possible d'écrire dans la configuration  $C_0$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_X \bar{\pi} + \rho_0 \bar{f} = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

#### A.1.6 Hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des petites perturbations consiste à supposer que le déplacement  $\vec{u}$  est faible, ainsi  $C_0$  et  $C_t$ ,  $\vec{X}$  et  $\vec{x}$  se confondent. On se place alors dans le cas où  $\bar{F}$  tend vers le tenseur unité, la déformation est alors caractérisée à des termes du second ordre près par :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{2}((\nabla u)^T + \nabla u) \\ \bar{C} &\simeq \bar{B} \simeq \bar{1} + 2\bar{\varepsilon} \text{ et } \bar{E} \simeq \bar{A} \simeq \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

et  $\bar{\sigma} \simeq \bar{\pi} \simeq \bar{S}$ . Les contraintes sont alors généralement désignées par le tenseur de CAUCHY vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites (*cf.* A.23).

## A.2 Lois de comportement

Dans le cas général, une loi de comportement prend la forme [SIDOROFF, 1982] :

– Configuration déformée :

$$\bar{\sigma}(t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t}(\bar{F}(\tau)), \quad (\text{A.26})$$

– Configuration initiale :

$$\bar{S}(t) = \mathcal{H}_{\tau \leq t}(\bar{F}(\tau)) \quad \text{et} \quad \bar{\pi}(t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t}(\bar{F}(\tau)). \quad (\text{A.27})$$

où  $\mathcal{G}_{\tau \leq t}$ ,  $\mathcal{H}_{\tau \leq t}$  et  $\mathcal{F}_{\tau \leq t}$  sont des fonctionnelles "histoire des déformations" traduisant que la contrainte en un point à l'instant  $t$  dépend de l'ensemble des déformations subies par le matériau en tout point jusqu'à cet instant.

Nous adoptons pour cela la méthode de l'**état local** telle qu'elle est exposée dans [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1996] : la connaissance en un point d'un certain nombre de variables permet de complètement déterminer l'état thermodynamique en ce point. Les dérivées par rapport au temps de ces variables n'interviennent pas dans la définition de l'état, l'évolution sera donc considérée comme une succession d'états d'équilibre. Parmi ces variables d'état, on distingue : les **variables observables**, scalaires ou tensorielles, qui sont directement accessibles par la mesure (température, "mesure de déformation"...) et les **variables internes** qui sont introduites pour décrire les phénomènes dissipatifs (plasticité, viscosité, viscoplasticité...) ou entre autre l'endommagement. Une loi de comportement doit, en outre, obéir aux critères suivants :

- **le principe d'objectivité** ou d'**indifférence matérielle** : la loi de comportement doit être invariante par tout changement de référentiel. Pour que cela soit vérifié, il faut que  $\psi$  soit fonction de variables objectives. Or suivant la description utilisée la définition de l'objectivité est différente. SIDOROFF [1982] considère une seconde configuration déformée  $C_t^*$ , définie par une rotation  $\bar{\bar{R}}$  de la première configuration déformée  $C_t$  et il note  $\star$  toute grandeur définie dans  $C_t^*$ . Dès lors, pour qu'une grandeur soit objective, elle doit vérifier les égalités décrites dans le TABLEAU A.1.
- **l'isotropie du matériau** : elle se traduit par une invariance des différentes lois constitutives par toute rotation de la configuration de référence. Dans ces conditions,  $\psi$  peut être considérée comme une fonction scalaire isotrope de  $\bar{\bar{B}}$  (resp.  $\bar{\bar{C}}$ ) dans  $C_t$  (resp.  $C_0$ ).

Description	Tenseur d'ordre 1	Tenseur d'ordre 2
Eulérienne	$\vec{u}^\star = \bar{\bar{R}} \cdot \vec{u}$	$\bar{\bar{a}}^\star = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{R}}^T$
Lagrangienne	$\vec{U}^\star = \vec{U}$	$\bar{\bar{A}}^\star = \bar{\bar{A}}$
Mixte	$\vec{U}^\star = \bar{\bar{R}} \cdot \vec{U}$	$\bar{\bar{A}}^\star = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{A}}$

TABLEAU A.1 – *Tableau des égalités définissant l'objectivité d'une grandeur suivant la description* extrait de [LAHELLEC, 2001]

### A.3 Cadre thermodynamique

Nous avons vu au paragraphe A.1.4, les équations d'équilibre statique qui peuvent se déduire de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Le **premier principe** exprime quant à lui la conservation de l'énergie. Si on note,  $e$  la densité massique d'énergie interne,  $r$  la

densité massique de production interne de chaleur,  $\vec{q}$  (resp.  $\vec{Q}$ ) une perte surfacique de chaleur au travers de la frontière  $\partial\omega$  (resp.  $\partial\Omega$ ) alors on peut exprimer la conservation de l'énergie suivant la configuration :

– Configuration déformée :

$$\rho\dot{e} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (\text{A.28})$$

– Configuration initiale :

$$\rho_0\dot{e} = \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{\bar{E}}} + \rho_0 r - \text{div}_X \vec{Q}, \quad (\text{A.29})$$

$$\rho_0\dot{e} = \bar{\bar{\pi}} : \dot{\bar{\bar{F}}} + \rho_0 r - \text{div}_X \vec{Q}. \quad (\text{A.30})$$

Si  $\mathcal{S}$  désigne l'entropie du système et  $\mathcal{T}_{ext}$  est le taux de chaleur reçu par celui-ci, divisé par la température  $T$ , alors l'inégalité fondamentale pour un système non adiabatique (**Second principe**) s'écrit  $\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0$ . Si bien que si l'on définit  $s$  comme densité massique d'entropie, en associant l'écriture du premier principe, on obtient alors trois expressions de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM, où  $\phi$  (resp.  $\phi_0$ ) désigne la dissipation sur  $C_t$  (resp.  $C_0$ ) :

– Configuration déformée :

$$\phi = -\rho(\dot{e} + T\dot{s}) - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_x T} + \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} \geq 0, \quad (\text{A.31})$$

– Configuration initiale :

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} + T\dot{s}) - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_X T} + \bar{\bar{S}} : \dot{\bar{\bar{E}}} \geq 0, \quad (\text{A.32})$$

$$\phi_0 = -\rho_0(\dot{e} + T\dot{s}) - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_X T} + \bar{\bar{\pi}} : \dot{\bar{\bar{F}}} \geq 0. \quad (\text{A.33})$$

On adopte alors la méthode de l'état local défini au paragraphe précédent où l'on note  $\mathcal{A}_i$  les variables internes dans  $C_0$  et  $\alpha_i$  leurs homologues dans  $C_t$ . On postule ensuite l'existence d'un potentiel thermodynamique du type énergie libre spécifique de HELMHOLTZ ( $\psi = e - sT$ ) dépendant des variables thermodynamiques.

Dans ce cas, il est montré dans [MÉO, 2000] que les équations A.31, A.32 et A.33 prennent la forme<sup>(1)</sup> :

– Configuration déformée :

$$\phi = (\bar{\bar{\sigma}} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}}) : \bar{\bar{L}}^T - \rho(s + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \bullet \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T}\vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_x T} \geq 0 \quad (\text{A.34})$$

– Configuration initiale :

$$\phi_0 = (\bar{\bar{S}} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{E}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0(s + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_X T} \geq 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\phi_0 = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot (\bar{\bar{\pi}} - 2\rho_0\bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{C}}}) : \dot{\bar{\bar{E}}} - \rho_0(s + \frac{\partial\psi}{\partial T})\dot{T} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i} \bullet \dot{\mathcal{A}}_i - \frac{1}{T}\vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_X T} \geq 0 \quad (\text{A.36})$$

---

(1). On rappelle que " $\bullet$ " désigne le produit contracté sur le nombre d'ordre suffisant pour que le résultat obtenu soit un scalaire.

Dès lors, on suppose que la dissipation résulte uniquement des déformations totales, des variables internes et de la conduction thermique ce qui implique que  $s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}$ .

On obtient alors les lois d'état reliant les variables observables aux variables duales associées et en définissant pour cela les variables forces thermodynamiques  $w_i$  (resp.  $\mathcal{W}_i$ ) associées aux variables internes (alors considérées comme variables flux) telles que  $w_i = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}$  (resp.  $\mathcal{W}_i = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{A}_i}$ ). On définit alors les autres variables forces telles que

– Configuration déformée :

$$\bar{\bar{\mathcal{F}}}_\sigma = \bar{\sigma} - 2\rho\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{B}}} \text{ et } \vec{\mathcal{F}}_q = \frac{-\overrightarrow{\text{grad}_x T}}{T} \quad (\text{A.37})$$

– Configuration initiale :

$$\bar{\bar{\mathcal{F}}}_S = \bar{\bar{S}} - \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{E}}}, \bar{\bar{\mathcal{F}}}_\pi = \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot (\bar{\bar{\pi}} - 2\rho_0\bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\bar{C}}}) \text{ et } \vec{\mathcal{F}}_Q = \frac{-\overrightarrow{\text{grad}_X T}}{T}. \quad (\text{A.38})$$

La dissipation sera donc la somme des produits forces/flux thermodynamiques définis ci-après :

– Configuration déformée :

Variables forces	$\bar{\bar{\mathcal{F}}}_\sigma$	$w_i$	$\vec{\mathcal{F}}_q$
Variables flux	$\bar{\bar{L}}^T$	$\dot{\alpha}_i$	$\vec{q}$

– Configuration initiale :

Variables forces	$\bar{\bar{\mathcal{F}}}_S \text{ et } \bar{\bar{\mathcal{F}}}_\pi$	$\mathcal{W}_i$	$\vec{\mathcal{F}}_Q$
Variables flux	$\dot{\bar{\bar{E}}}$	$\dot{\mathcal{A}}_i$	$\vec{Q}$

On effectue un découplage des phénomènes thermique et mécanique par décomposition de la dissipation  $\phi$  (resp.  $\phi_0$ ) dans  $C_t$  (resp.  $C_0$ ) en une contribution purement thermique  $\phi^{ther}$  (resp.  $\phi_0^{ther}$ ) et une contribution purement mécanique, notée  $\phi^{int}$  (resp.  $\phi_0^{int}$ ) appelée **dissipation intrinsèque**, telles qu'elles soient séparément positives et ce, indépendamment de la configuration [GERMAIN, 1973].

On obtient finalement une nouvelle écriture de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM telle que :

– Configuration déformée :

$$\phi^{int} = \bar{\bar{\mathcal{F}}}_\sigma : \bar{\bar{L}}^T + w_i \bullet \dot{\alpha}_i \geq 0 \text{ et } \phi^{ther} = \vec{\mathcal{F}}_q \cdot \vec{q} \geq 0 \quad (\text{A.39})$$

– Configuration initiale :

$$\phi_0^{int} = \bar{\bar{\mathcal{F}}}_S : \dot{\bar{\bar{E}}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i \geq 0 \text{ et } \phi_0^{ther} = \vec{\mathcal{F}}_Q \cdot \vec{Q} \geq 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\phi_0^{int} = \bar{\bar{\mathcal{F}}}_\pi : \dot{\bar{\bar{E}}} + \mathcal{W}_i \bullet \dot{\mathcal{A}}_i \geq 0 \text{ et } \phi_0^{ther} = \vec{\mathcal{F}}_Q \cdot \vec{Q} \geq 0 \quad (\text{A.41})$$

## A.4 Pseudo-potentiel de dissipation et lois complémentaires

Pour décrire pleinement l'évolution des variables associées aux processus dissipatifs, il faut postuler l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation  $\varphi$  qui est alors fonction des variables flux. On suppose pour cela une relation linéaire forces et flux telle que le proposent les relations d'ONSAGER ou bien une généralisation non-linéaire de celle-ci [SIDOROFF, 1977]. Il est important de préciser que pour ne pas violer l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM,  $\varphi$  est à valeur scalaire, continu, convexe, non-négatif et nul à l'origine (*i.e.*  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ).

L'écriture des lois complémentaires s'effectue alors en se plaçant dans le cadre des **modèles standards généralisés** tels qu'ils peuvent être définis par HALPHEN et NGUYEN QUOC SON [1975]. Dans ces conditions, "les forces thermodynamiques suivent un principe de normalité par rapport au pseudo-potentiel de dissipation".

De ce fait, l'hypothèse d'indépendance des phénomènes mécanique et thermique, faite précédemment pour justifier le découplage de la dissipation, permet de distinguer un pseudo-potentiel purement thermique  $\varphi^{ther}$  ne dépendant que des "flux thermiques" et un autre purement mécanique  $\varphi^{int}$  ne dépendant que des "flux mécaniques" :

$$\begin{cases} \varphi(\bar{\bar{L}}^T, \dot{\alpha}_i, \vec{q}) = \varphi^{int}(\bar{\bar{L}}^T, \dot{\alpha}_i) + \varphi^{ther}(\vec{q}) \text{ dans } C_t, \\ \varphi(\dot{\bar{\bar{E}}}, \dot{\mathcal{A}}_i, \vec{Q}) = \varphi^{int}(\dot{\bar{\bar{E}}}, \dot{\mathcal{A}}_i) + \varphi^{ther}(\vec{Q}) \text{ dans } C_0. \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

L'introduction de  $\varphi^{(2)}$  dans les équations A.39, A.40 et A.41 permet alors d'écrire suivant la configuration :

– Configuration déformée :

$$\bar{\sigma} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}}, \quad (\text{A.43a})$$

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\alpha}_i}, \quad (\text{A.43b})$$

$$-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \vec{q}}. \quad (\text{A.43c})$$

Il faut noter que par respect du principe d'objectivité la variable flux  $\bar{\bar{L}}^T$  a été substituée par le tenseur taux de déformation  $\bar{\bar{D}}$  qui lui est objectif. En effet, l'isotropie de  $\psi$  implique que  $\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}}$  est symétrique, si bien que  $\bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} : \bar{\bar{L}}^T = \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} : \bar{\bar{D}}$ .

---

(2). Il est possible de définir un potentiel de forces  $\varphi^*$  comme étant une fonction des variables forces thermodynamiques, obtenu à partir de  $\varphi$  par une transformée de LEGENDRE-FENCHEL et ayant les mêmes propriétés que  $\varphi$ .

– Configuration initiale :

$$\bar{\bar{S}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{E}}} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{E}}} \text{ et } \bar{\bar{F}}^{-1} \cdot (\bar{\bar{\pi}} - 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{C}}}) = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{E}}}, \quad (\text{A.44a})$$

$$-\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{\mathcal{A}}}_i} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{\mathcal{A}}}_i}, \quad (\text{A.44b})$$

$$-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}_X T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \bar{\bar{Q}}}. \quad (\text{A.44c})$$

### REMARQUE A.3

Sous l'hypothèse des petites perturbations, en utilisant les relations définies au paragraphe A.1.6, les équations précédentes sont équivalentes et peuvent s'écrire telles que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}}, \quad (\text{A.45a})$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (\text{A.45b})$$

$$-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \bar{\bar{q}}}. \quad (\text{A.45c})$$

□

## A.5 Notion d'états intermédiaires [SIDOROFF, 1973, 1974, 1976]

Suite au paragraphe précédent, nous avons observé la nécessité d'utiliser une ou plusieurs variables internes pour modéliser les comportements complexes. Le bon choix de ces variables ainsi que du pseudo-potentiel de dissipation permettra une bonne représentation comportementale du matériau étudié. C'est pourquoi, il est quelquefois plus pratique de se ramener à des variables ayant un sens physique. Pour ce faire, une des solutions possibles est de postuler l'existence d'un état intermédiaire.

### A.5.1 Application à un état intermédiaire quelconque

On considère un phénomène élasto-dissipatif quelconque. On postule alors l'existence d'un état intermédiaire ( $C_i$ ) pour passer d'un état de référence  $C_0$ , à un état actuel  $C_t$  (cf. FIG. A.5) qui considère la transformation comme la composition d'une transformation purement élastique et d'une autre anélastique. Sous ces considérations, en notant  $\bar{\bar{F}}_a$  et  $\bar{\bar{F}}_e$  respectivement les gradients des transformations anélastique et élastique,  $\bar{\bar{F}}$  se décompose comme suit :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_a. \quad (\text{A.46})$$

Il est alors possible de redéfinir pour chaque transformation, des tenseurs cinématiques spécifiques. On définira, par exemple, les tenseurs de CAUCHY-GREEN gauches anélastique et élas-

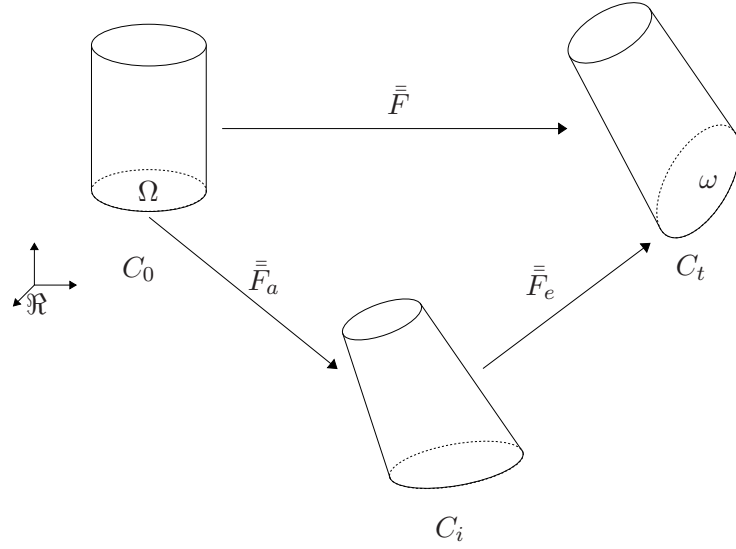


FIGURE A.5 – Milieu avec une configuration intermédiaire [SIDOROFF, 1973].

tique :

$$\bar{\bar{B}}_e = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_e^T, \quad (\text{A.47a})$$

$$\bar{\bar{B}}_a = \bar{\bar{F}}_a \cdot \bar{\bar{F}}_a^T = \bar{\bar{F}}_e^{-1} \cdot B \cdot \bar{\bar{F}}_e^{-T}. \quad (\text{A.47b})$$

La prise en compte d'un caractère dissipatif par le biais d'un état intermédiaire, entraîne alors, par rapport à un modèle élastique (*cf.* § IV.3), l'introduction d'une nouvelle variable interne, dans le cas le plus général  $\bar{\bar{F}}_a$  ou bien  $\bar{\bar{F}}_e$  :

$$\psi = \psi(\bar{\bar{F}}, \bar{\bar{F}}_a, T). \quad (\text{A.48})$$

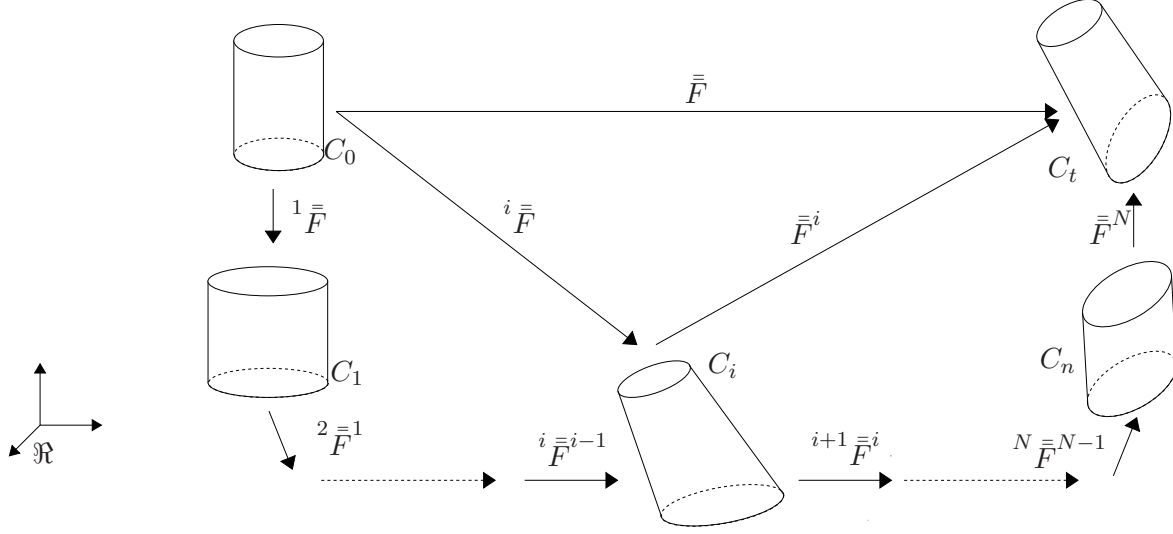
### A.5.2 Milieu à plusieurs configurations

SIDOROFF [1976] propose pour l'étude de milieux nécessitant plus d'une variable interne par exemple en viscoélasticité non-linéaire, d'introduire plusieurs états intermédiaires. [MÉO, 2000] expose ce type de description dans le cas d'un comportement couplant plusieurs phénomènes tels que l'élasto-visco-plasticité par exemple.

Soient  $d\vec{X}$  un vecteur de la configuration  $C_0$ ,  $d\vec{x}_i$  ( $i \in [1..N]$ ) et  $d\vec{x}$  ses images dans les  $n$  configurations intermédiaires  $C_i$  et finale  $C_t$ . On définit ainsi les différents gradients de transformation :  $d\vec{x} = \bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X} = \bar{\bar{F}}^i \cdot d\vec{x}_i$ ,  $d\vec{x}_i = {}^i\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{X}$  et  $d\vec{x}_{i+1} = {}^{i+1}\bar{\bar{F}} \cdot d\vec{x}_i$  pour  $i \in [1..N-1]$ . Par un raisonnement analogue au cas à un seul état intermédiaire, le modèle sera complètement défini par la connaissance d'un jeu de  $n+2$  variables<sup>(3)</sup>. Ici, notre choix de variables d'état portera sur le jeu suivant :  $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, \dots, {}^N\bar{\bar{F}})$ . Pour la suite,  $\psi$  dépendra donc de ces variables d'état. La

(3). Il existe trois jeux de variables possibles :  $(\bar{\bar{F}}, T, \bar{\bar{F}}^1, \dots, \bar{\bar{F}}^N)$ ,  $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, \dots, {}^N\bar{\bar{F}})$ ,  $(\bar{\bar{F}}, T, {}^1\bar{\bar{F}}, {}^1\bar{\bar{F}}^2, \dots, {}^{N-1}\bar{\bar{F}}^N, \bar{\bar{F}}^N)$ .



FIGURE A.6 – Milieu avec  $N$  configurations intermédiaires extrait de [MÉO, 2000].

notion de tenseur de CAUCHY-GREEN droit et gauche est introduite pour chaque état comme étant :

$${}^i\bar{\bar{C}} = {}^i\bar{\bar{F}}^T \cdot {}^i\bar{\bar{F}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{C}}^i = \bar{\bar{F}}^{iT} \cdot \bar{\bar{F}}^i, \quad (\text{A.49a})$$

$${}^i\bar{\bar{B}} = {}^i\bar{\bar{F}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^T \quad \text{et} \quad \bar{\bar{B}}^i = \bar{\bar{F}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{iT}. \quad (\text{A.49b})$$

Il en va de même pour les taux de déformation :

$${}^i\bar{\bar{D}} = (\dot{{}^i\bar{\bar{F}}} \cdot {}^i\bar{\bar{F}}^{-1})_{sym} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{D}}^i = (\dot{\bar{\bar{F}}}^i \cdot \bar{\bar{F}}^{i-1})_{sym}. \quad (\text{A.50})$$

D'après SIDOROFF [1973, 1974, 1976], chaque état intermédiaire n'étant défini qu'à une rotation près, nous devons vérifier le **Principe d'Invariance des Fonctions Constitutives (P.I.F.C.)**<sup>(4)</sup>. Une loi (de comportement ou complémentaire) vérifie ce principe si et seulement si elle peut être réduite à une forme ne faisant intervenir que des grandeurs qui appartiennent aux deux familles de grandeurs suivantes : les tenseurs  **$\Gamma$ -invariants**, respectant la loi de transformation :  $\bar{\bar{X}}^* = \bar{\bar{X}}$ , et les tenseurs  **$\Gamma$ -objectifs**, respectant la loi de transformation :  $\bar{\bar{X}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{X}} \cdot \bar{\bar{Q}}^T$  [SIDOROFF, 1973].

Par un raisonnement similaire à celui mené au paragraphe A.4, puisque la vérification du principe d'objectivité revient à la vérification du P.I.F.C. dans le cas particulier où  $\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{Q}}_1 = \dots = \bar{\bar{Q}}_N$ , l'application de ce principe entraîne donc pour l'énergie libre,  $\psi = \psi(\bar{\bar{C}}, {}^1\bar{\bar{C}}, \dots, {}^N\bar{\bar{C}}, T)$ .

Dans le cas de variables internes entièrement déterminées par le biais d'états intermédiaires, l'isotropie du matériau doit se traduire par l'invariance des lois constitutives pour toute rotation

(4). Le P.I.F.C. se traduit par une invariance des lois de comportement par tout  **$\Gamma$ -changement** de référentiel telle que  $\bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}} \cdot \bar{\bar{F}}$ ,  ${}^i\bar{\bar{F}}^* = \bar{\bar{Q}}_i \cdot {}^i\bar{\bar{F}}$  pour  $i \in [1..N]$ , avec  $\{\bar{\bar{Q}}, \bar{\bar{Q}}_1, \dots, \bar{\bar{Q}}_N\}$ ,  $N+1$  tenseurs orthogonaux dépendant du temps.

de la configuration initiale et en particulier vérifier l'invariance de l'énergie libre pour une telle transformation. Par conséquent, si un matériau est isotrope, alors sa fonction énergie libre spécifique est une fonction scalaire isotrope des variables  $(\bar{\bar{C}}^1, \bar{\bar{C}}^2, \dots, \bar{\bar{C}}^N, T)$ . En outre, en utilisant la décomposition polaire de  $\bar{\bar{F}}$ , on remarque que cette propriété est équivalente à avoir  $\psi$  **fonction scalaire isotrope** de  $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^1, \dots, \bar{\bar{B}}^N, T)$ .

On a vu dans le cas élastique (*cf.* § IV.3) que  $\psi$  était un fonction scalaire isotrope de  $(I_1, I_2, I_3)$ , les trois invariants de  $\bar{\bar{C}}$  ou  $\bar{\bar{B}}$  suivant la configuration choisie. Dans un cas à un état intermédiaire (et par conséquent à une seule variable interne) ; on a :

$$\psi(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}_e) = \hat{\psi}(I_1, I_2, I_3, I_1^e, I_2^e, I_3^e, K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}), \quad (\text{A.51})$$

$I_1^e, I_2^e, I_3^e$  désignant les trois premiers invariants de  $\bar{\bar{B}}_e$ ,  $K_{11} = \text{tr}(\bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{B}}_e)$ ,  $K_{12} = \text{tr}(\bar{\bar{B}}_e^2 \cdot \bar{\bar{B}})$ ,  $K_{21} = \text{tr}(\bar{\bar{B}}^2 \cdot \bar{\bar{B}}_e)$  et  $K_{22} = \text{tr}(\bar{\bar{B}}^2 \cdot \bar{\bar{B}}_e^2)$  les quatre invariants mixtes.

### A.5.3 Lois constitutives

Suite à l'introduction de ces variables internes, il est maintenant possible d'écrire l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM associée à la notion d'état intermédiaire.

#### • Configuration déformée

Dans le cas isotrope en formulation eulérienne, l'énergie libre spécifique est fonction isotrope des variables  $(\bar{\bar{B}}, \bar{\bar{B}}^i)$  et de  $T$ . Dans ces conditions, on est en présence d'un nouveau couple de variables force/flux thermodynamiques tel que  $(w_i, \alpha_i)$  soit représenté par  $(-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i}, \dot{\bar{\bar{B}}}^i)$  dans la relation A.34. On a alors :

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}}) : \bar{\bar{D}} - \rho(\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T})\dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} : \dot{\bar{\bar{B}}}^i - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_x T} \geq 0. \quad (\text{A.52})$$

Une démarche analogue à celle menée précédemment nous conduirait à l'expression d'une loi de comportement vérifiant le P.I.F.C.  $(\bar{\sigma} = 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}})$ , mais à une expression erronée des lois complémentaires. En effet, ces dernières feraient intervenir  $\dot{\bar{\bar{B}}}^i$  qui n'est ni  $\Gamma$ -invariant, ni  $\Gamma$ -objectif. Une solution est de décomposer  $\dot{\bar{\bar{B}}}^i$  tel que  $\dot{\bar{\bar{B}}}^i = \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{B}}^i + \bar{\bar{B}}^i \cdot \bar{\bar{L}}^T - 2\bar{\bar{F}}^i \cdot {}^i \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{F}}^{iT}$ , ce qui entraîne une nouvelle expression de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM (*cf.* [MÉO, 2000]) :

$$\phi = (\bar{\sigma} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} - 2\rho \bar{\bar{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i}) : \bar{\bar{D}} - \rho(\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T})\dot{T} + 2\rho \bar{\bar{V}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} \cdot \bar{\bar{V}}^i : {}^i \bar{\bar{D}}^o, \quad (\text{A.53})$$

où  ${}^i \bar{\bar{D}}^o = \bar{\bar{R}}^i \cdot {}^i \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{R}}^{iT}$ . L'équation A.53 ne fait apparaître alors que des variables  $\Gamma$ -objectives et

l'ensemble des lois qui en découlent, vérifie le P.I.F.C.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = 2\rho \bar{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}} + 2\rho \bar{B}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}^i} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{D}} \\ \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ 2\rho \bar{V}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{D}^o} \\ -\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \bar{q}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\bar{B}, \bar{B}^k) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{D}, {}^k \bar{D}^o) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\bar{q}) \end{array} \right. \quad (\text{A.54})$$

### • Configuration initiale

On entend ici traiter le cas où  $\psi$  est fonction scalaire isotrope des tenseurs  $(\bar{C}, {}^i \bar{C})$  et de la température  $T$ . Dans ces conditions, on est présence d'un nouveau couple de variables force/flux thermodynamiques tel que  $(w_i, \dot{\alpha}_i)$  soit représenté par  $(-\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i \bar{C}}, {}^i \dot{\bar{C}})$  dans les relations A.35 et A.36. Le principe de normalité, nous permet alors d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{E}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{E}}} \quad \text{ou} \quad \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{E}}} \\ \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial {}^i \bar{C}} = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i \dot{\bar{C}}} \\ -\frac{\text{grad}_x T}{T} = \frac{\partial \varphi^{ther}}{\partial \bar{Q}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\bar{C}, {}^k \bar{C}) \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\dot{\bar{C}}, {}^k \dot{\bar{C}}) \\ \varphi^{ther} = \varphi^{ther}(\bar{Q}) \end{array} \right. \quad (\text{A.55})$$

On vérifie alors que les deux formulations de la loi de comportement A.55a,b vérifient le P.I.F.C. Il en est de même pour la loi complémentaire A.55d qui ne fait intervenir que des grandeurs  $\Gamma$ -invariantes.

#### A.5.4 Généralisation des modèles rhéologiques aux grandes déformations

Pour un modèle à une seule configuration intermédiaire, la décomposition du gradient de transformation (cf. Eq. A.46) ramenée au cadre des petites déformations, entraîne une décomposition additive du tenseur des déformations  $\bar{\varepsilon}$  telle que  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_e + \bar{\varepsilon}_a$  où  $\varepsilon_a$  pouvant être une déformation plastique, visqueuse ou viscoplastique. Les modèles rhéologiques de type ①, ② et ③ suivent respectivement une décomposition de l'énergie libre telle que  $\psi = \psi_e(\bar{\varepsilon}_e)$ ,  $\psi = \psi_e(\bar{\varepsilon}_e) + \psi_a(\bar{\varepsilon}_a)$  et  $\psi = \psi_0(\bar{\varepsilon}) + \psi_e(\bar{\varepsilon}_e)$  (cf. FIG. A.7).

A partir des travaux de SIDOROFF [1977], on montre que dans le cas isotrope et d'une décomposition à  $N$  états intermédiaires de l'énergie libre analogue à celle adoptée dans le cas des petites

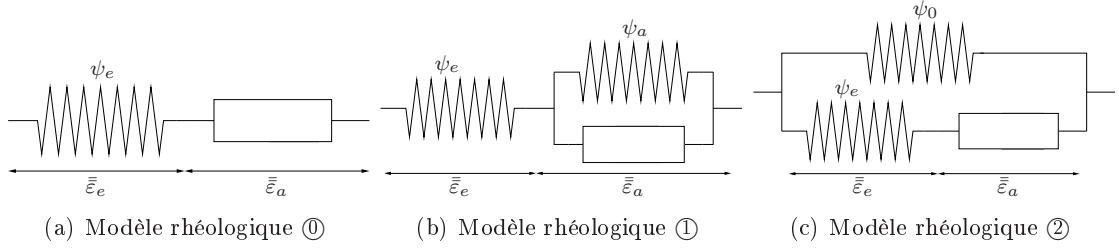
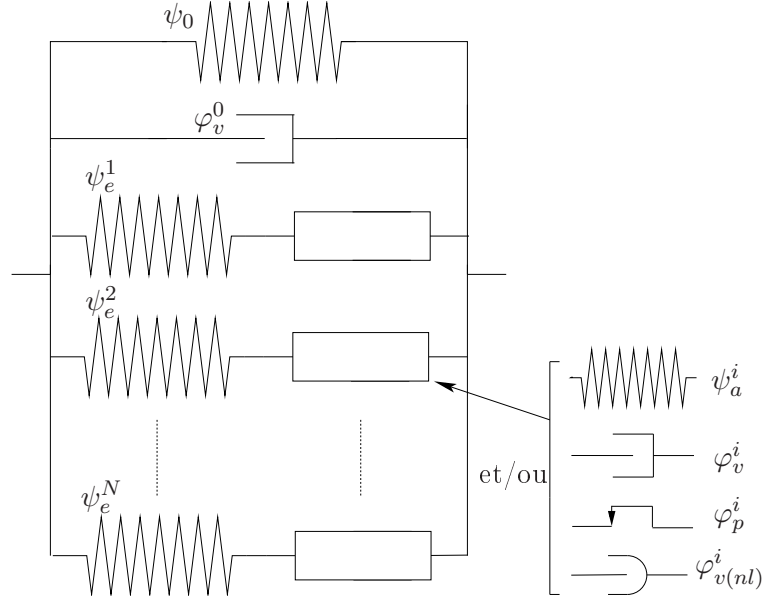


FIGURE A.7 – Quelques exemples de modèles rhéologiques à un seul état intermédiaire.

FIGURE A.8 – Généralisations à un modèle rhéologique étendu composé de  $N$  branches.

déformations, on peut alors écrire en formulation eulérienne :

$$\begin{cases} \psi = \psi_0(\bar{\bar{B}}) + \psi_e^i(\bar{\bar{B}}^i) + \psi_a^i(\bar{\bar{B}}^i) \\ \psi_0, \psi_e^i, \psi_a^i \text{ étant } 2N + 1 \text{ fonctions scalaires isotropes} \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

Le système A.54 peut être vu comme la généralisation aux grandes déformations du modèle rhéologique présenté FIGURE A.8. A partir de ce modèle rhéologique généralisé étendu, on peut retrouver chaque modèle unitaire appliqué au cadre des grandes déformations.

### A.5.5 Milieux incompressibles

La transformation totale étant décomposée en une succession d'états, il est possible de distinguer l'**incompressibilité** globale du matériau,  $\det \bar{\bar{F}} = 1$  et donc l'incompressibilité d'une des transformations intermédiaires telle que  $\det {}^i \bar{\bar{F}} = 1$  pour  $i \in [1..N]$ . [MÉO, 2000] nous montre que

ces relations sont alors respectivement équivalentes suivant la configuration choisie aux relations :

$$\text{tr} \bar{\bar{D}} = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr} {}^i \bar{\bar{D}} = \text{tr} {}^i \bar{\bar{D}}^0 = 0 \quad \forall i \in [1..N] \quad (\text{A.57a})$$

$$\Leftrightarrow \dot{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad \text{et} \quad {}^i \dot{\bar{\bar{C}}} : {}^i \bar{\bar{C}}^{-1} = 0 \quad \forall i \in [1..N]. \quad (\text{A.57b})$$

### • Configuration déformée

Si l'on se place dans le cadre de l'égalité A.53, la particularisation de  $\bar{\bar{D}}$ , par l'équation A.57a, autorise l'application du principe de normalité sur la seule partie déviatorique de  $\bar{\bar{\sigma}}_v$  :

$$\bar{\bar{\sigma}}_v^D = \left[ \bar{\bar{\sigma}} - 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} - 2\rho \bar{\bar{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} \right]^D = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \bar{\bar{D}}}. \quad (\text{A.58})$$

On est alors amené à introduire  $p$  une fonction scalaire homogène à une pression hydrostatique telle que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\rho \bar{\bar{B}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}} + 2\rho \bar{\bar{B}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} - p \bar{\bar{1}}. \quad (\text{A.59})$$

Il en va de même pour les termes  $2\rho \bar{\bar{V}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} \cdot \bar{\bar{V}}^i$  de la relation A.53. C'est donc sur les parties déviatoriques de ces dernières que le principe de normalité est appliqué :

$$\left[ 2\rho \bar{\bar{V}}^i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\bar{B}}^i} \cdot \bar{\bar{V}}^i \right]^D = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i \bar{\bar{D}}^0}. \quad (\text{A.60})$$

### • Configuration initiale

Dans le cas des descriptions mixte et lagrangienne, les conditions d'incompressibilité A.57b ne permettent l'écriture de  $\bar{\bar{S}}_v$  et  $\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{\pi}}_v$  qu'à un multiple de  $\bar{\bar{C}}^{-1}$  près :

$$\bar{\bar{F}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\pi}}_v = \bar{\bar{S}}_v = \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} - p \bar{\bar{C}}^{-1}, \quad (\text{A.61})$$

si bien que :

$$\bar{\bar{S}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} - p \bar{\bar{C}}^{-1}, \quad (\text{A.62})$$

et

$$\bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}} + \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{E}}}} - p \text{Cof} \bar{\bar{F}}. \quad (\text{A.63})$$

Dans le cas où la  $i$ -ème transformation intermédiaire est incompressible, on a :

$$\left[ -\rho_0 {}^i \bar{\bar{C}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial {}^i \dot{\bar{\bar{C}}}} \right]^D = {}^i \bar{\bar{C}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial {}^i \dot{\bar{\bar{C}}}}. \quad (\text{A.64})$$

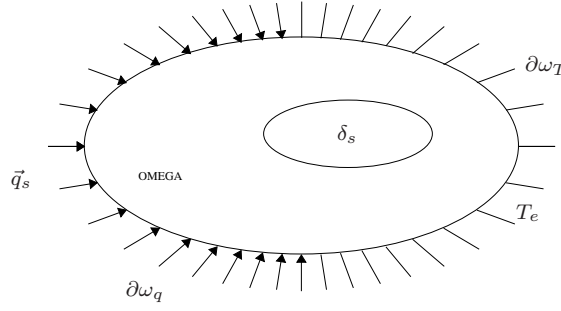


FIGURE A.9 – Conditions limites thermiques.

## A.6 Aspect théorique du couplage thermo-mécanique

Afin de mettre en évidence les différents termes de couplage, nous introduisons une écriture de l'équation de la chaleur dans le cadre thermodynamique énoncé au paragraphe A.3. On va donc prendre en compte la dépendance en température du potentiel d'énergie libre  $\psi$  et du pseudo-potential de dissipation mécanique  $\varphi^{int}$ .

Les équations constitutives sont obtenues à partir de l'écriture eulérienne de la conservation de la quantité de mouvement et des conditions limites (cf. § A.1.4). L'aspect thermique quant à lui est obtenu par l'écriture de l'équation de la chaleur.

La FIGURE A.9 propose les conditions aux limites thermiques où  $\vec{q}_s$  et  $T_e$  sont respectivement les valeurs de flux de chaleur (conductif ou convectif) sur la fraction de contour  $\partial\omega_q$  et celles de  $T$  la température sur la fraction de contour  $\partial\omega_T$ . L'obtention de l'équation de la chaleur s'effectue alors en partant de la relation  $\psi = e - sT$  telle que :

$$\dot{e} = \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} : \dot{\bar{B}} + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i + \frac{\partial\psi}{\partial T} \dot{T} + \dot{T}s + T\dot{s}. \quad (\text{A.65})$$

Or l'hypothèse  $s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}$  (on suppose ici que la dissipation résulte uniquement des déformations totales, des variables internes et de la conduction thermique) nous conduit à l'écriture suivante :

$$\dot{e} = \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} : \dot{\bar{B}} + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i + T\dot{s}. \quad (\text{A.66})$$

La combinaison de l'équation locale de conservation d'énergie A.28 avec la relation A.66 permet alors d'écrire en description eulérienne :

$$\rho \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} : \dot{\bar{B}} + \rho \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i + \rho T\dot{s} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (\text{A.67})$$

Cependant, le principe d'objectivité nous contraint à l'écriture suivante :

$$2\rho \left[ \bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}} + \bar{B}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \right] : \bar{D} + 2\rho \bar{V}^i \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}^i} \cdot \bar{V}^i : \bar{D}^o + \rho T\dot{s} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (\text{A.68})$$

Une association de cette relation aux equations constitutives A.54 nous donne alors :

$$\left[ \bar{\sigma} - \frac{\partial \phi^{int}}{\partial \bar{D}} - p \bar{1} \right] : \bar{D} + \left[ \frac{\partial \phi^{int}}{\partial^i \bar{D}^o} \right] : {}^i \bar{D}^o + \rho T \dot{s} = \bar{\sigma} : \bar{D} + \rho r - \text{div}_x \vec{q}, \quad (\text{A.69})$$

On peut ensuite simplifier cette écriture par le biais des relations d'incompressibilité ( $\text{tr} \bar{D} = 0$ ) :

$$\rho T \dot{s} = \phi^{int} + \rho r - \text{div}_x \vec{q} \quad \text{avec} \quad \phi^{int} = \frac{\partial \phi^{int}}{\partial \bar{D}} : \bar{D} + \frac{\partial \phi^{int}}{\partial^i \bar{D}^o} : {}^i \bar{D}^o. \quad (\text{A.70})$$

Or puisque  $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial T} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial t} \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{B}} : \dot{\bar{B}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T}. \end{aligned}$$

En réinjectant ce dernier résultat et la chaleur spécifique  $C_p = T \frac{\partial s}{\partial T}$  dans la relation A.70, on obtient :

$$\underbrace{\rho C_p \dot{T}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\text{div}_x \vec{q}}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\rho r}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\phi^{int}}_{\textcircled{4}} - \underbrace{\rho T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{B}} : \dot{\bar{B}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \bar{B}^i} : \dot{\bar{B}}^i \right)}_{\textcircled{5}}. \quad (\text{A.71})$$

La signification physique des termes qui apparaissent dans cette équation est proposée dans le TABLEAU A.2.

Termes	Signification physique
①	Absorption de chaleur
②	Perte de chaleur
③	Echange volumique réalisé avec l'extérieur
④	Dissipation intrinsèque (mécanique) qui est homogène à une source volumique de chaleur interne.
⑤	Termes de couplage qui traduisent la dépendance entre les problèmes mécanique et thermique.

TABLEAU A.2 – Signification physique des termes de l'équation A.71.

Sur le plan thermique, en considérant que le matériau diffuse de manière isotrope, on peut postuler la forme suivante du pseudo-potential de dissipation thermique :

$$\varphi^{ther} = \frac{1}{2T} (\bar{\kappa}^{-1} \cdot \vec{q}) \cdot \vec{q}, \quad (\text{A.72})$$

qui débouche sur un comportement thermique obéissant à la loi de FOURIER  $\vec{q} = -\bar{\kappa} \text{grad}_x T$  où  $\bar{\kappa}$  est le tenseur des conductivités exprimé en description eulérienne.

---

Au niveau mécanique, on adopte la généralisation aux grandes déformations des modèles rhéologiques dont les paramètres matériaux seront choisis dépendants de la température [GABRIELI, 1995 ; MÉO, 2000 ; BOUKAMEL *et al.*, 2001]. Certains auteurs comme LION [1997] ; HOLZAPFEL et SIMO [1996a] choisissent de décomposer la transformation en une partie purement thermique et une autre purement mécanique (élastique, viscoélastique, élastoplastique, viscoplastique...). On introduit ainsi un état intermédiaire purement thermique tel que  $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_M \cdot \bar{\bar{F}}_T$  avec  $\bar{\bar{F}}_T = (f(T - T_0))^{1/3} \bar{\bar{1}}$  où  $T_0$  est la température initiale et  $f(0) = 1$ .





**B**

Expression analytique de la  
contrainte en traction simple et  
en cisaillement simple pour les  
matériaux à comportement  
hyperélastique incompressible



## B.1 Application en traction simple

Soit un solide ( $\mathcal{S}_t$ ) en élastomère soumis à un effort de traction noté  $\vec{T}$  (cf. FIG. B.1) et subissant un allongement unitaire selon  $\vec{e}_1$  tel que  $\lambda = 1 + \frac{\delta}{L}$ .

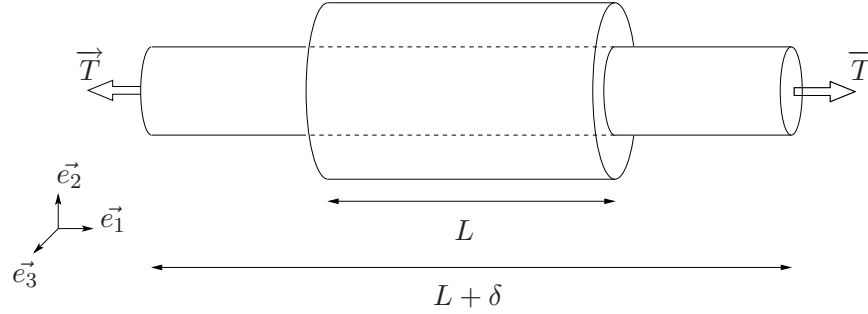


FIGURE B.1 – Exemple de déformation d'un cylindre en traction simple sur son axe.

Dans ce cas, la contrainte observable par l'essai s'exprime directement par  $\frac{T}{S}$  avec  $S$  l'aire de la section de l'éprouvette à l'état déformé. En tenant compte de l'hypothèse d'incompressibilité, le tenseur gradient de transformation s'écrit alors :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Si bien que de part l'expression des deux premiers invariants sous l'hypothèse d'incompressibilité,  $I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}$  et  $I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}$ , il est alors aisé d'appliquer l'expression en description mixte Eq. B.2 à cet état de déformation.

$$\bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{\mathbb{1}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{\bar{C}} \right] - p \text{Cof} \bar{\bar{F}} \quad (\text{B.2})$$

On obtient alors la forme suivante du premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF :

$$\bar{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{33} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \pi_{11} = 2\rho_0 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \lambda + 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right] - \frac{p}{\lambda} \\ \pi_{22} = \pi_{33} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{\lambda}} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \right] - p\sqrt{\lambda} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Il est alors possible de déterminer la pression hydrostatique  $p$  en effectuant le calcul  $\pi_{22} = \pi_{33} = 0$ . car nous sommes dans le cas d'une traction simple suivant  $\vec{e}_1$  et finalement de définir pleinement  $\pi_{11}$  tel que :

$$\pi_{11} = 2\rho_0 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{1}{\lambda} \right] \quad (\text{B.4})$$

Dans ce cas, la force de traction exprimée par rapport à la configuration initiale s'écrit  $T(\lambda) = S\pi_{11}$ .

## B.2 Application en cisaillement simple

Soit un solide ( $\mathcal{S}_c$ ) en élastomère soumis à un effort de cisaillement noté  $\vec{H}$  (cf. FIG. B.2) et subissant un taux de cisaillement  $\gamma$  selon  $\vec{e}_1$ .

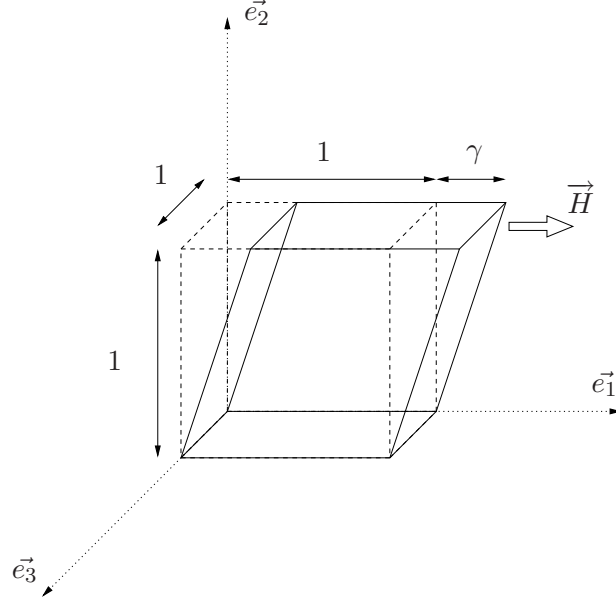


FIGURE B.2 – Exemple de déformation d'un cube d'arrêtes unité en cisaillement simple selon  $\vec{e}_1$ .

De la même manière que précédemment sous l'hypothèse d'incompressibilité, on peut exprimer le tenseur gradient de transformation  $\bar{\bar{F}}$  et les invariants de la déformation :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } I_1 = I_2 = \gamma^2 + 3. \quad (\text{B.5})$$

On obtient alors la forme suivante du premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF :

$$\bar{\bar{\pi}} = \begin{bmatrix} 1 & \pi_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \pi_{12} = 2\rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \gamma \quad (\text{B.6})$$

Dans ce cas, l'effort de cisaillement exprimée par rapport à la configuration initiale s'écrit  $H = S\pi_{12}$ .

---

# Introduction à la rhéologie des matériaux

**Avertissement :**

La présentation de la rhéologie des matériaux que nous proposons ici n'est qu'un bilan de ce qu'on peut déjà trouver dans la littérature. Pour une connaissance plus approfondie, le lecteur est donc invité à consulter les ouvrages qui ont servi à sa réalisation tels que SUQUET [1982] ; LEMAÎTRE et CHABOCHE [1996] ; BESSON *et al.* [2001] ; BOUKAMEL [2001].



## C.1 Présentation des modèles rhéologiques

Dans ce paragraphe, on présentera les modèles rhéologiques usuels utilisés dans le cadre des petites perturbations pour des transformations isothermes. Pour cela, on appliquera ces hypothèses au cadre thermodynamique défini en ANNEXE A à partir des relations A.45a et A.45b. On obtient alors :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}} & \text{Loi d'état,} \\ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\alpha}_i} = 0 & \text{Lois complémentaires.} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

La définition d'un modèle de comportement, pour un matériau donné, nécessite donc une certaine méthodologie :

- choix des variables d'état, variables observables et variables internes selon la nature des phénomènes à modéliser,
- choix d'une forme de potentiel thermodynamique (ou d'énergie libre) et de pseudo-potentiel de dissipation à partir de constatations expérimentales et en fonction des variables d'état et de paramètres caractéristiques du comportement du matériau,
- écriture de la loi d'état et des lois complémentaires qui représentent les lois constitutives reliant les variables d'état aux variables associées,
- réalisation d'essais expérimentaux et identification des paramètres de comportement du matériau.

On présentera donc, tout d'abord les éléments analogiques de base et les lois associatives que l'on peut leur appliquer et ensuite des exemples d'essais caractéristiques permettant la classification des solides réels.

### C.1.1 Éléments analogiques de base

LEMAÎTRE et CHABOCHE [1996] précisent que les modèles analogiques sont des groupements d'éléments mécaniques dont les réponses à des sollicitations sont similaires à celles des matériaux. Ils sont utilisés, souvent à des fins didactiques, pour donner une image concrète des équations de comportement. L'analogie se limite là et ne porte en aucun cas sur les mécanismes physiques eux-mêmes.

On peut répertorier les éléments analogiques de base dans le TABLEAU C.1.



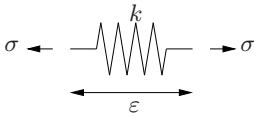
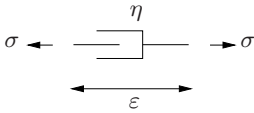
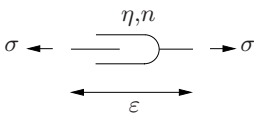
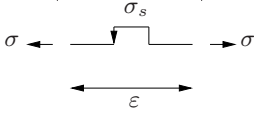
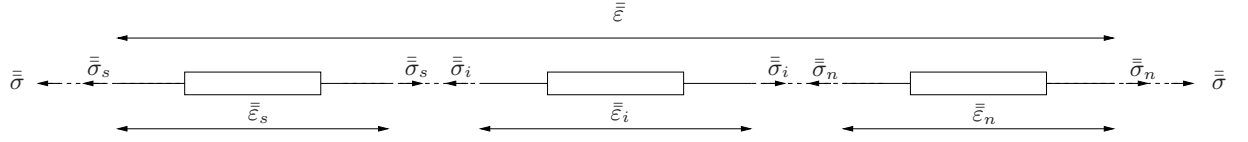
Type d'élément et comportement associé	Cas 1D	Cas 3D
<p>Ressort</p>  <p>Elasticité linéaire</p>	$\begin{cases} \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho} k \varepsilon^2, \\ \varphi(\dot{\varepsilon}) = 0. \end{cases} \quad (C.2)$ $\Rightarrow \sigma = k \varepsilon \quad (C.3)$	$\begin{cases} \psi(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon}, \\ \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}) = 0. \end{cases} \quad (C.4)$ $\Rightarrow \bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} \bar{\varepsilon} \quad (C.5)$ <p><math>\bar{\bar{C}}</math> est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'élasticité.</p>
<p>Amortisseur</p>  <p>Viscosité linéaire</p>	$\begin{cases} \psi(\varepsilon) = 0, \\ \varphi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}^2. \end{cases} \quad (C.6)$ $\Rightarrow \sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (C.7)$	$\begin{cases} \psi(\bar{\varepsilon}) = 0, \\ \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \bar{\bar{\Lambda}} : \dot{\bar{\varepsilon}}. \end{cases} \quad (C.8)$ $\Rightarrow \bar{\sigma} = \bar{\bar{\Lambda}} \dot{\bar{\varepsilon}} \quad (C.9)$ <p><math>\bar{\bar{\Lambda}}</math> est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur de viscosité.</p>
<p>Amortisseur Type NORTON</p>  <p>Viscosité non-linéaire</p>	$\begin{cases} \psi(\varepsilon) = 0, \\ \varphi(\dot{\varepsilon}) = \frac{n}{n+1} \eta \dot{\varepsilon}^{\frac{n+1}{n}}. \end{cases} \quad (C.10)$ $\Rightarrow \sigma = \eta \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} \quad (C.11)$	$\begin{cases} \psi(\bar{\varepsilon}) = 0, \\ \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} \eta \dot{\bar{\varepsilon}}^{\frac{n+1}{n}} & \text{si } \text{tr} \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases} \quad (C.12)$ $\Rightarrow \bar{\sigma} = \eta \dot{\bar{\varepsilon}}^{\frac{1}{n}} \text{ et } \text{tr} \dot{\bar{\varepsilon}} = 0. \quad (C.13)$
<p>Patin (frottement sec)</p>  <p>Plasticité Seuil de contrainte, <math>\sigma_s</math> en 1D</p>	$\begin{cases} \psi(\varepsilon) = 0, \\ \varphi(\dot{\varepsilon}) = \sup_{\sigma \in [-\sigma_s, \sigma_s]} \{\sigma \dot{\varepsilon}\}. \end{cases} \quad (C.14)$ $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{si }  \sigma  < \sigma_s, \\ \sigma = \sigma_s \text{sgn}(\dot{\varepsilon}) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (C.15)$	$\begin{cases} \psi(\bar{\varepsilon}) = 0, \\ \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}) = \sup_{\sigma \in \mathcal{C}_s} \{\bar{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}}\}. \end{cases} \quad (C.16)$ <p>où <math>\mathcal{C}_s</math> est un domaine fermé de <math>\mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3</math><sup>a</sup> et défini par une fonction critère (ou seuil), <math>f</math> telle que :</p> $\begin{cases} \text{si } f(\bar{\sigma}) < 0 & \text{alors } \bar{\sigma} \in \mathcal{C}_s - \partial \mathcal{C}_s, \\ \text{si } f(\bar{\sigma}) = 0 & \text{alors } \bar{\sigma} \in \partial \mathcal{C}_s. \end{cases} \quad (C.17)$

TABLEAU C.1 – Tableau récapitulatif des éléments analogiques de base

<sup>a</sup>  $\mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3$  est l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétrique.

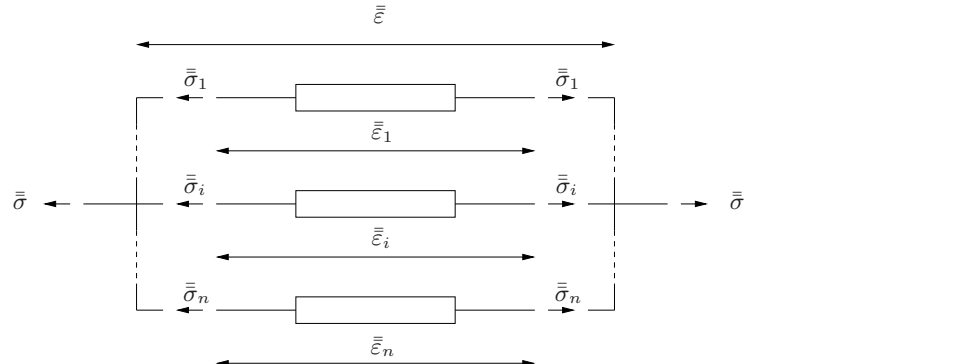
Dans l'élaboration de modèle plus complexe possédant au moins deux éléments analogiques de base, il est nécessaire de définir des lois associatives. On observe alors deux grandes familles :

- En série :



$$\begin{cases} \bar{\bar{\epsilon}} = \sum_{i=1}^n \bar{\bar{\epsilon}}_i, \\ \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_i \quad \text{pour } i \in [1..n]. \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

- En parallèle :

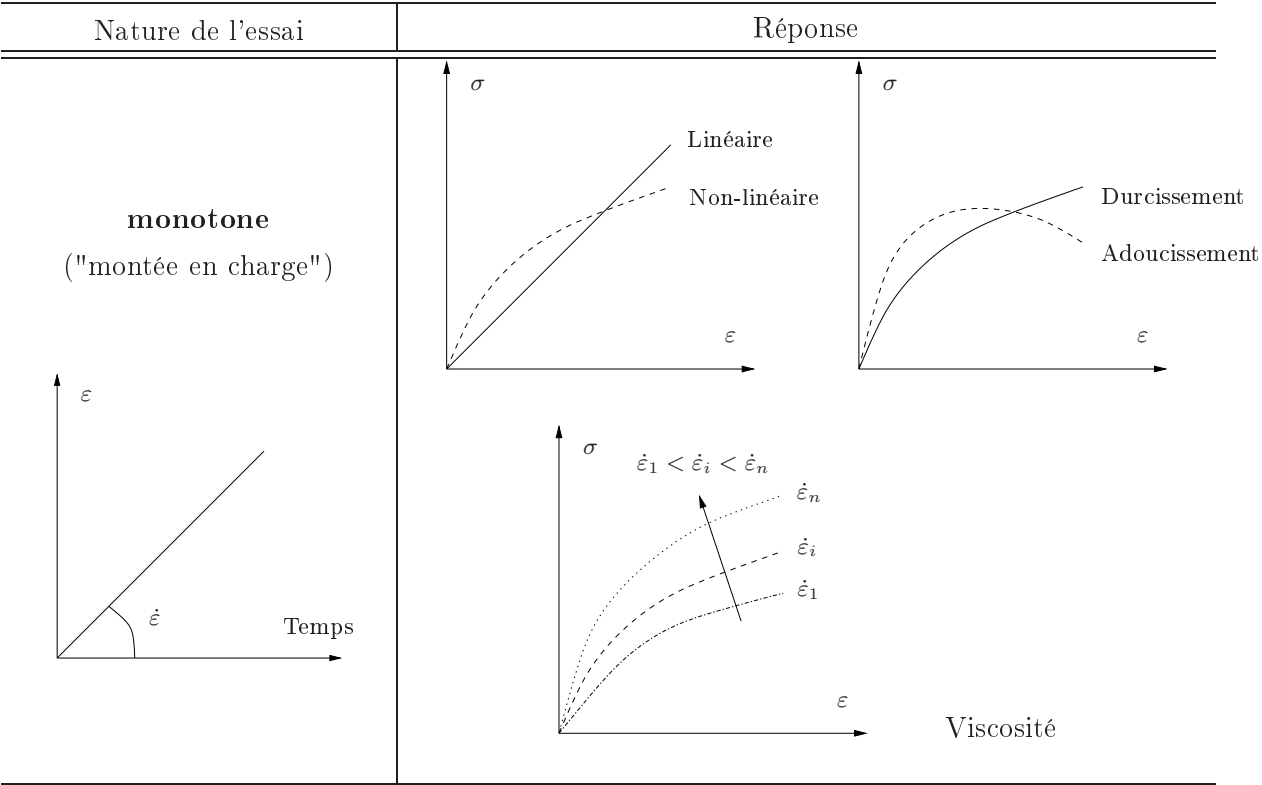


$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = \sum_{i=1}^n \bar{\bar{\sigma}}_i, \\ \bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_i \quad \text{pour } i \in [1..n]. \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

### C.1.2 Essais caractéristiques de classification des solides réels

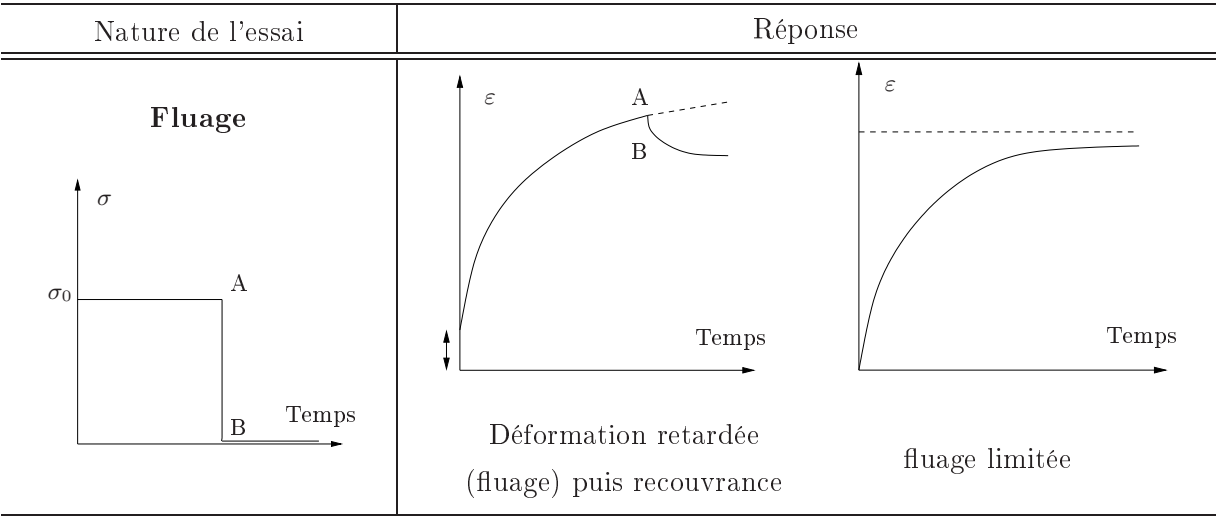
Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en traction-compression simple, à température constante. On se base généralement sur ces essais pour réaliser la classification des solides réels. Ces essais sont en général uniaxiaux et pilotés en force,  $F$  ou en déplacement,  $u$ , ce qui confère à une éprouvette de section  $S$  et de longueur  $L_o$  un état de contrainte,  $\sigma = \frac{F}{S}$  ou de déformation,  $\varepsilon = \frac{u}{L_o}$  uniforme dans tout le volume utile permettant de l'assimiler à un élément de volume.

- **Essai monotone (montée en charge)** : L'éprouvette est soumise à une déformation (ou une contrainte) à vitesse constante. La réponse linéaire ou non, avec ou sans adoucissement est donnée par l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation (*cf.* TAB. C.2). Le rôle de l'échelle de temps (viscosité) peut aussi être mis en avant en faisant varier la vitesse de déformation,  $\dot{\varepsilon}$ .



TAB. C.2 – Essai caractéristique type chargement monotone

– **Essai de fluage** : L'éprouvette est soumise à un échelon de contrainte. La réponse est donnée par l'évolution de la déformation au cours du temps. Elle caractérise la **viscosité** du matériau. Si cette déformation reste limitée lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on a coutume de dire que le milieu étudié a un comportement de type solide (*cf.* TAB. C.3).



TAB. C.3 – Essai caractéristique de fluage

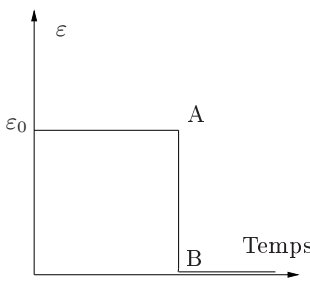
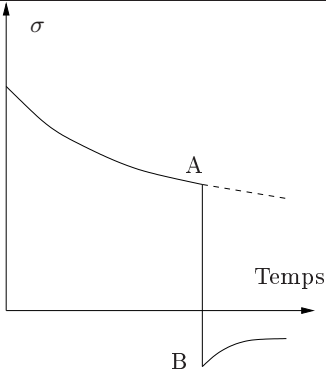
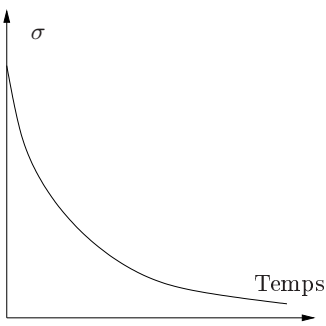
Nature de l'essai	Réponse	
<div><p><b>Relaxation</b></p></div>	 Relaxation puis effacement	 Relaxation totale

TABLEAU C.4 – Essai caractéristique de relaxation

- **Essai de relaxation** : C’est l’essai dual du précédent. L’éprouvette est soumise à un échelon de déformation. La réponse est donnée par l’évolution de la contrainte au cours du temps. Elle caractérise la **viscosité** du matériau. Si la relaxation est totale, on a coutume de dire que le matériau étudié a un comportement de type fluide (cf. TAB. C.4).

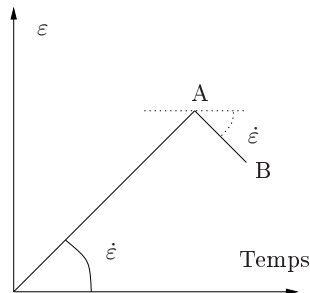
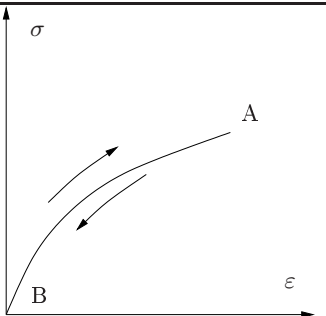
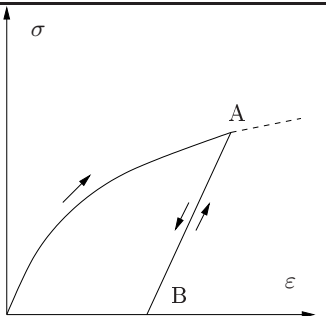
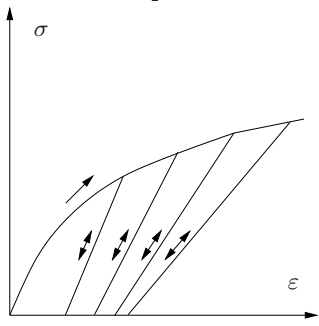
Nature de l'essai	Réponse	
<div><p><b>Charge-décharge</b></p></div>	 Elastique	 Anélastique (écrouissage)
		Endommagement

TABLEAU C.5 – Essai caractéristique de charge-décharge

- **Essai de charge-décharge** : Dans ce cas, on augmente la force  $F$  puis on la ramène à zéro (*cf.* TAB. C.6). Ce type d'essai permet de mettre en évidence certains phénomènes :
  - le milieu est dit **élastique** lorsqu'il y a superposition des courbes de charge-décharge ;
  - dans le cas contraire, si après décharge complète il subsiste une déformation résiduelle, on parle alors d'**anelasticité**. Lorsque ce phénomène se manifeste à partir d'un certain seuil d'effort et que celui ci reste independant de l'histoire du chargement, le milieu est **plastique parfait** ;
  - si ce seuil varie, on parle d'**écrouissage**. Il y a **durcissement** (écrouissage positif) si le seuil augmente et **radoucissement** (écrouissage négatif) dans le cas inverse ;
  - Dans le domaine élastique et dans la plage des petites déformations, la partie élastique du comportement de la plupart des solides est linéaire. Si le module d'élasticité diminue lors d'une série d'essais de charge-décharge, il y a **endommagement** [SUQUET, 1982].
- **Essai de chargement cyclique** : L'éprouvette est soumise à une sollicitation, en contrainte ou en déformation, de type périodique . Lors de ce type d'essai, selon le matériau, on peut voir varier les propriétés d'écrouissage au cours des cycles. On parle alors d'adoucissement ou durcissement cyclique (*cf.* FIG. C.2). Le premier phénomène se manifeste lorsque l'amplitude de la réponse, en contrainte ou en déformation, diminue respectivement en déformation ou en contrainte imposée. Il y aura donc durcissement cyclique dans le cas contraire. Lorsque la réponse est elle aussi périodique, on dit qu'il y a stabilisation

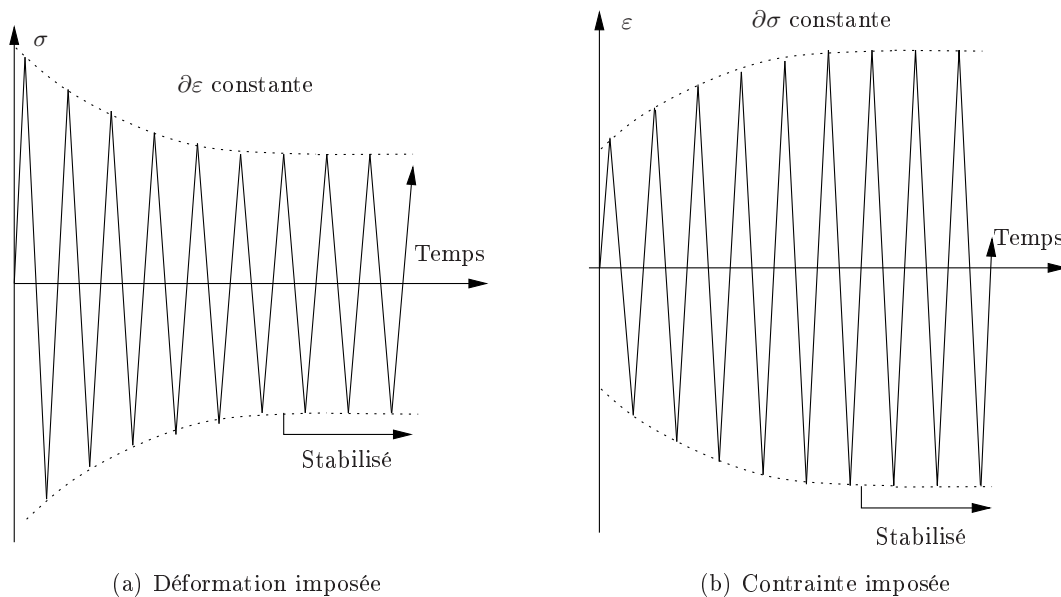


FIGURE C.1 – Phénomène d'adoucissement cyclique

et existence d'un cycle stabilisé. Ce type d'essai permet de mettre en évidence certains phénomènes (*cf.* TAB. C.5) :

- en contrainte imposée, l'**accomodation** est la stabilisation du trajet parcouru à chaque cycle par le point  $(\sigma, \varepsilon)$  sur une courbe fermée formant une boucle d'aire non nulle ( $\partial\varepsilon \rightarrow 0$ ). Lorsque la stabilisation du cycle se réduit à une portion de courbe d'aire nulle, on parle d'**adaptation** et le milieu est alors celui d'un solide élastique à une déformation résiduelle près. Le phénomène de **rochet** est une augmentation de la déformation résiduelle à chaque cycle jusqu'à la ruine [SUQUET, 1982].
- en déformation imposée, à ces deux observations correspondent les effets de relaxation ou de non relaxation de la contrainte moyenne [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1996].

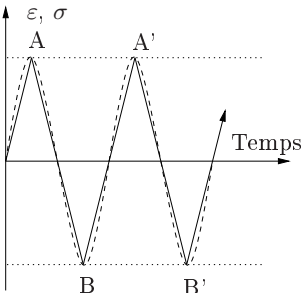
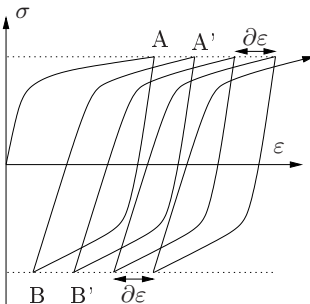
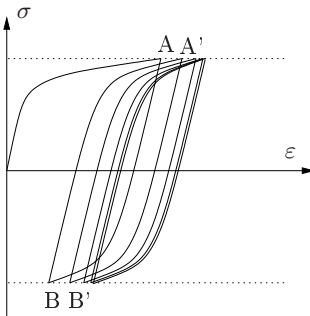
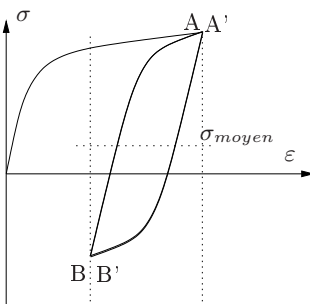
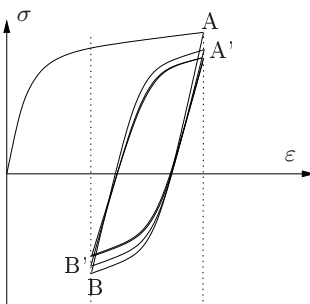
Nature de l'essai	Réponse
<p><b>Cyclique</b> (Triangulaire ou sinusoïdal)</p> 	<p style="text-align: center;"><b>Contrainte imposée</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Phénomène de rochet</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Phénomène d'accomodation</p> </div> </div> <p style="text-align: center;"><b>Déformation imposée</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Non relaxation de la contrainte moyenne</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Relaxation de la contrainte moyenne</p> </div> </div>

TABLEAU C.6 – Essai caractéristique de type cyclique

- Autres essais : Il est difficile d'en faire une liste précise tant leur nombre est important. Par contre, on peut citer pour exemple les divers phénomènes qu'ils peuvent caractériser : le vieillissement (la fatigue), la rupture par endommagement, la rupture par fissuration, le frottement, ...)

### C.1.3 Schématisation des comportements réels

Dans ce paragraphe, pour mieux définir les comportements réels, nous donnerons, de manière qualitative, l'allure des courbes de réponses aux essais caractéristiques (écrouissage, fluage, relaxation) comme les auteurs LEMAÎTRE et CHABOCHE [1996] le présentent.

#### C.1.3.a Solide élastique parfait

Le processus de déformation est instantanément réversible. Les courbes de réponses qualitatives aux essais caractéristiques sont comme suit :

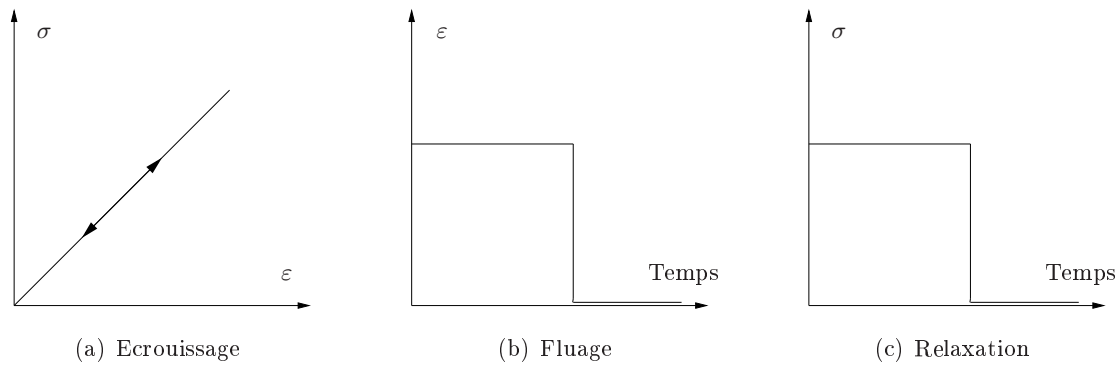


FIGURE C.2 – Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un solide élastique parfait

Le modèle analogique de l'élasticité linéaire est le ressort (*cf.* § C.1.1). Dans le cas 3D, la loi de comportement des solides linéairement élastiques est  $\bar{\sigma} = \bar{\bar{\bar{C}}} \bar{\bar{\bar{\varepsilon}}}$ . On peut alors préciser que dans le cas isotrope, le modèle est parfaitement défini par deux paramètres du matériau, les coefficients de LAMÉ,  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{\bar{\bar{\varepsilon}}}) \bar{\bar{\bar{1}}} + 2\mu \bar{\bar{\bar{\varepsilon}}}$ .

#### C.1.3.b Fluide visqueux

Le fluide visqueux présente un comportement d'écoulement pour toute valeur de contrainte. Les courbes de réponses qualitatives aux essais caractéristiques sont observables sur la figure FIG. C.3.

Le modèle analogique du fluide visqueux est le modèle de MAXWELL défini par l'association en série d'un ressort et d'un amortisseur (*cf.* FIG. C.4).

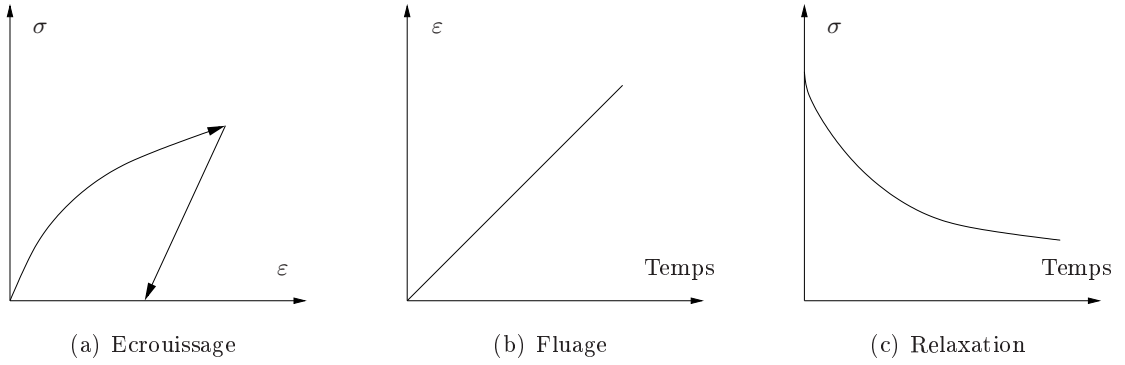


FIGURE C.3 – Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un fluide visqueux

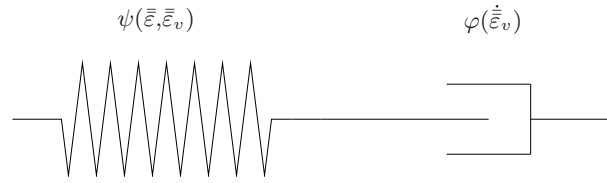


FIGURE C.4 – Modèle de MAXWELL

Les variables d'états sont alors la déformation totale,  $\bar{\varepsilon}$  et la déformation visqueuse,  $\bar{\varepsilon}_v$ <sup>(1)</sup>. Ainsi, le modèle est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre spécifique : } \psi(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_v) = \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v) : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v), \\ \text{le pseudo-potential de dissipation : } \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}_v) = \frac{1}{2} \bar{\bar{\Lambda}} \dot{\bar{\varepsilon}}_v : \dot{\bar{\varepsilon}}_v. \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

d'où la loi de comportement :

$$\bar{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{C}}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v); \quad (\text{C.21})$$

et la loi complémentaire :

$$\bar{\bar{C}}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v) = \bar{\bar{\Lambda}} \dot{\bar{\varepsilon}}_v. \quad (\text{C.22})$$

Dans le cas monodimensionnel, le modèle de MAXWELL est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre : } \psi(\varepsilon, \varepsilon_v) = \frac{1}{2\rho} k(\varepsilon - \varepsilon_v)^2, \\ \text{la dissipation : } \varphi(\dot{\varepsilon}_v) = \frac{1}{2} \eta (\dot{\varepsilon}_v)^2. \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

d'où la loi de comportement et la loi complémentaire s'expriment par :

$$\sigma = k(\varepsilon - \varepsilon_v) = \eta \dot{\varepsilon}_v. \quad (\text{C.24})$$

Sa réponse au test de relaxation  $\varepsilon = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t)$  avec  $\mathcal{H}(t)$  est la fonction échelon d'HEAVISIDE telle que  $\mathcal{H} = 0$  si  $t < 0$ ,  $\mathcal{H} = 1$  si  $t \geq 0$ , est :

$$\sigma(t) = k\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{k}{\eta}t\right) \quad (\text{C.25})$$

(1). On notera alors la déformation élastique telle que  $\bar{\varepsilon}_e = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v$ .



On introduit alors le temps caractéristique de relaxation tel que  $\tau = \frac{\eta}{k}$ .

### C.1.3.c Solide visco-élastique

Le solide visco-élastique présente un comportement réversible, mais dont la réversibilité est retardée. Les courbes de réponses qualitatives aux essais caractéristiques sont observables sur la figure FIG. C.5.

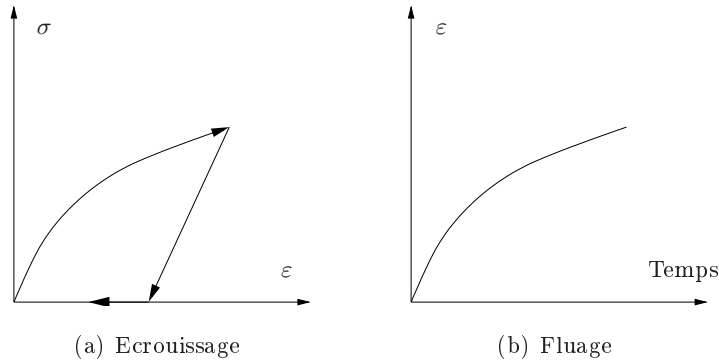


FIGURE C.5 – Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un solide visco-élastique

Le modèle analogue du solide visco-élastique est le modèle de KELVIN-VOIGT défini par l'association en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur (cf. FIG. C.6).

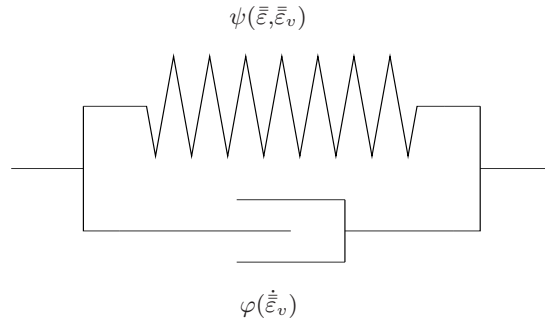


FIGURE C.6 – Modèle de KELVIN-VOIGT

La variable d'état est alors la déformation totale,  $\bar{\epsilon}$ . Ainsi, le modèle est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre spécifique : } \psi(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}} \bar{\epsilon} : \bar{\epsilon}, \\ \text{le pseudo-potential de dissipation : } \varphi(\dot{\bar{\epsilon}}) = \frac{1}{2} \bar{\bar{\Lambda}} \dot{\bar{\epsilon}} : \dot{\bar{\epsilon}}. \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

d'où la loi de comportement :

$$\bar{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\epsilon}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} = \bar{\bar{C}} \bar{\epsilon} + \bar{\bar{\Lambda}} \dot{\bar{\epsilon}}. \quad (\text{C.27})$$

Dans le cas monodimensionnel, le modèle de KELVIN-VOIGT est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre : } \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho}k(\varepsilon)^2, \\ \text{la dissipation : } \varphi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\eta(\dot{\varepsilon})^2. \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

d'où la loi de comportement :

$$\sigma = k\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (\text{C.29})$$

Sa réponse au test de fluage  $\sigma = \sigma_0\mathcal{H}(t)$  est :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} \left( 1 - \exp\left(-\frac{k}{\eta}t\right) \right). \quad (\text{C.30})$$

#### C.1.3.d Autres exemples de modèles de matériaux viscoélastiques

Le modèle analogique de type POYNTING-THOMSON est défini par l'association en série d'un ressort et d'une association en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur (*cf.* FIG. C.7).

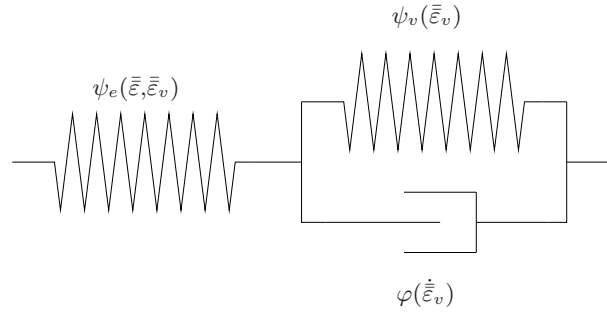


FIGURE C.7 – *Modèle de POYNTING-THOMSON*

Les variables d'états sont alors la déformation totale,  $\bar{\varepsilon}$  et la déformation visqueuse,  $\bar{\varepsilon}_v$ . Ainsi, le modèle est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre spécifique : } \psi(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_v) = \psi_e(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_v) + \psi_v(\bar{\varepsilon}_v) \\ \hspace{10em} = \frac{1}{2\rho}\bar{\bar{C}}_e(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v) : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v) + \frac{1}{2\rho}\bar{\bar{C}}_v\bar{\varepsilon}_v : \bar{\varepsilon}_v, \\ \text{le pseudo-potentiel de dissipation : } \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}_v) = \frac{1}{2}\bar{\bar{\Lambda}}\dot{\bar{\varepsilon}}_v : \dot{\bar{\varepsilon}}_v. \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

d'où la loi de comportement :

$$\bar{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{C}}_e(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v); \quad (\text{C.32})$$

et la loi complémentaire :

$$\bar{\bar{C}}_e(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v) + \bar{\bar{C}}_v(\bar{\varepsilon}_v) = \bar{\bar{\Lambda}}\dot{\bar{\varepsilon}}_v. \quad (\text{C.33})$$

Dans le cas monodimensionnel, le modèle de POYNTING-THOMSON est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre : } \psi(\varepsilon, \varepsilon_v) = \frac{1}{2\rho}k_{e_{PT}}(\varepsilon - \varepsilon_v)^2 + \frac{1}{2\rho}k_{v_{PT}}(\varepsilon_v)^2, \\ \text{la dissipation : } \varphi(\dot{\varepsilon}_v) = \frac{1}{2}\eta(\dot{\varepsilon}_v)^2. \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

d'où la loi de comportement et la loi complémentaire s'expriment respectivement par :

$$\sigma = k_{ePT}(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad \text{et} \quad k_{ePT}(\varepsilon - \varepsilon_v) + k_{vPT}\varepsilon_v = \eta\dot{\varepsilon}_v. \quad (\text{C.35})$$

Sa réponse au test de relaxation  $\varepsilon = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t)$  est :

$$\sigma(t) = k_{ePT}\varepsilon_0 \left( \frac{k_{vPT}}{k_{vPT} + k_{ePT}} + \frac{k_{ePT}}{k_{vPT} + k_{ePT}} \exp\left(-\frac{k_{ePT} + k_{vPT}}{\eta}t\right) \right) \quad (\text{C.36})$$

Sa réponse au test de fluage  $\sigma = \sigma_0 \mathcal{H}(t)$  est :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{k_{ePT}} + \frac{1}{k_{vPT}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{k_{vPT}}{\eta}t\right) \right) \right). \quad (\text{C.37})$$

Le modèle analogique de type ZENER, quant à lui, est défini par l'association en parallèle d'un ressort et d'une association en série d'un ressort et d'un amortisseur (*cf.* FIG. C.8).

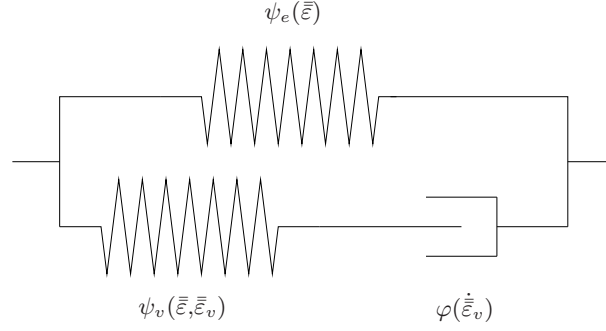


FIGURE C.8 – *Modèle de ZENER*

Les variables d'états sont alors la déformation totale,  $\bar{\varepsilon}$  et la déformation visqueuse,  $\bar{\varepsilon}_v$ . Ainsi, le modèle est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'énergie libre spécifique : } \psi(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_v) = \psi_e(\bar{\varepsilon}) + \psi_v(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_v) \\ \quad \quad \quad = \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}}_e \bar{\varepsilon} : \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}}_v (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v) : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v), \\ \text{le pseudo-potential de dissipation : } \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}_v) = \frac{1}{2} \bar{\bar{\Lambda}} \dot{\bar{\varepsilon}}_v : \dot{\bar{\varepsilon}}_v. \end{array} \right. \quad (\text{C.38})$$

d'où la loi de comportement :

$$\bar{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{C}}_e \bar{\varepsilon} + \bar{\bar{C}}_v (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v); \quad (\text{C.39})$$

et la loi complémentaire :

$$\bar{\bar{C}}_v (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_v) = \bar{\bar{\Lambda}} \dot{\bar{\varepsilon}}_v. \quad (\text{C.40})$$

Dans le cas monodimensionnel, le modèle de ZENER est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'énergie libre : } \psi(\varepsilon, \varepsilon_v) = \frac{1}{2\rho} k_{eZ}(\varepsilon)^2 + \frac{1}{2\rho} k_{vZ}(\varepsilon - \varepsilon_v)^2, \\ \text{la dissipation : } \varphi(\dot{\varepsilon}_v) = \frac{1}{2} \eta (\dot{\varepsilon}_v)^2. \end{array} \right. \quad (\text{C.41})$$

d'où la loi de comportement et la loi complémentaire s'expriment respectivement par :

$$\sigma = k_{eZ}\varepsilon + k_{vZ}(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad \text{et} \quad k_{vZ}(\varepsilon - \varepsilon_v) = \eta \dot{\varepsilon}_v. \quad (\text{C.42})$$

Le modèle de ZENER peut se ramener à celui de POYNTING-THOMSON, à l'aide du double changement de variable,

$$\begin{cases} \frac{1}{k_{eZ}} = \frac{1}{k_{ePT}} + \frac{1}{k_{vPT}}, \\ k_{vZ} = k_{ePT} + k_{vPT}, \end{cases} \quad (\text{C.43})$$

ce qui prouve que les deux modèles sont en fait équivalents en petites déformations.

On peut encore améliorer ces modèles en généralisant le nombre de branches, par exemple, le modèle de MAXWELL généralisé qui est obtenu en ajoutant en parallèle d'un ressort,  $N$  branches composées d'un ressort et d'un amortisseur en série (cf. FIG. C.9).

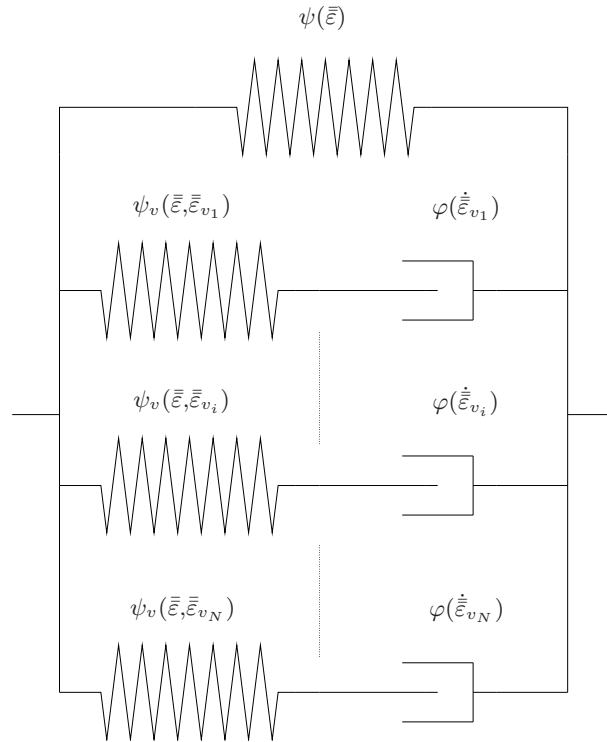


FIGURE C.9 – *Modèle de MAXWELL généralisé*

Dans le cas monodimensionnel, les équations constitutives deviennent alors :

$$\sigma = k_{\infty}\varepsilon + \sum_{i=1}^N k_i(\varepsilon - \varepsilon_{v_i}) \quad \text{et} \quad k_i(\varepsilon - \varepsilon_{v_i}) = \eta_i \dot{\varepsilon}_{v_i} \quad \text{pour } i \in [1..N], \quad (\text{C.44})$$

#### REMARQUE C.4

Les modèles rhéologiques viscoélastiques peuvent être utilisés pour approximer les noyaux de relaxation noté  $k(t)$  d'une formulation fonctionnelle de la viscoélasticité linéaire pour un matériau

homogène isotrope et incompressible telle que :

$$\bar{\sigma}^D(t) = 2k_0 \bar{\varepsilon}^D(t) - \int_0^t 2\dot{k}(t') \bar{\varepsilon}^D(t-t') dt'. \quad (\text{C.45})$$

Généralement, il est plus pratique d'utiliser la réponse en fréquence associée. On pose alors  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$  en cherchant une réponse sous la forme  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{j\omega t}$ . On obtient le module dynamique  $k^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$  fonction de  $g^*(\omega)$ , transformée de FOURIER<sup>(2)</sup> de  $k(t)$  (cf. TAB. C.7). Dès lors, on peut exprimer la partie déviatorique de l'équation V.7 :

$$\sigma^D s(t) = j\omega \varepsilon_0 \underbrace{\int_0^t k(t') e^{-j\omega t'} dt'}_{g^*(\omega)} e^{j\omega t} = j\omega g^*(\omega) \varepsilon^D. \quad (\text{C.46})$$

Les modèles simples de type MAXWELL et de ZENER étant caractérisés par un temps de relaxation unique ( $\tau$ ), ils ne peuvent rendre compte du comportement sur un large domaine de vitesse de déformation (idem pour le comportement en fréquence). Généralement, pour augmenter le domaine de validité temporel ou fréquentiel de ces modèles, on utilise des modèles multi-branches comme le propose le modèle de MAXWELL généralisé. Dans ces conditions, le développement du noyau devient alors un développement en série de PRONY. L'inconvénient de ce type d'approche est le nombre de paramètres à prendre en compte pour pouvoir représenter correctement le comportement du matériau.

Modèle	Noyau de relaxation	Module dynamique
MAXWELL avec $\tau = \frac{\eta}{k}$	$k(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}}$	$k^* = \begin{cases} \frac{j\omega k}{\frac{1}{\tau} + j\omega}, \\ j\omega g^*(\omega). \end{cases}$
ZENER avec $\tau = \frac{\eta}{k_{vZ}}$	$k(t) = k_{eZ} \left( 1 + \frac{k_{vZ}}{k_\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	$k^* = \begin{cases} k_{eZ} + \frac{j\omega k_{vZ}}{\frac{1}{\tau} + j\omega}, \\ k_{eZ} + j\omega g^*(\omega). \end{cases}$
MAXWELL généralisé avec $\tau_i = \frac{\eta_i}{k_i}, \forall i \in [1..N]$	$k(t) = k_\infty \left( 1 + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{k_\infty} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right)$	$k^* = \begin{cases} k_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega k_i}{\frac{1}{\tau_i} + j\omega}, \\ k_\infty + j\omega g^*(\omega). \end{cases}$

TAB. C.7 – Quelques exemples d'utilisation des modèles rhéologiques dans la recherche de fonction de relaxation en petites déformations.

□

(2). La transformée de FOURIER est définie pour une fonction  $f$  par  $\mathcal{L}_F(f) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

### C.1.3.e Solide élastique parfaitement plastique

Les solides élastiques parfaitement plastiques, ou élastoplastiques sans écrouissage, sont caractérisés par une déformation élastique en deçà d'un seuil de contrainte et un écoulement plastique pour la valeur du seuil. La déformation est alors indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur de contrainte.

#### REMARQUE C.5

Le temps n'a pas d'influence sur les modèles ne contenant pas de piston, seul modèle élémentaire sensible à l'échelle de temps. Il est donc inutile d'essayer les tests de relaxation et de fluage.  $\square$

Leur réponse lors d'un essai caractéristique d'écrouissage est observable sur la figure FIG. C.10.

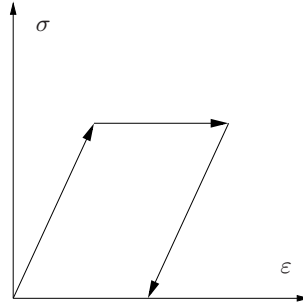


FIGURE C.10 – Réponses académiques à l'essai caractéristique d'écrouissage pour un solide élastique parfaitement plastique

Le modèle analogique schématisant le comportement élastoplastique sans écrouissage est le modèle de SAINT-VENANT. Il s'agit de l'association en série d'un ressort et d'un patin (cf. FIG. C.1.3.e).

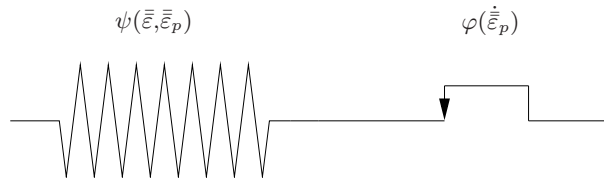


FIGURE C.11 – Modèle de SAINT-VENANT

Les variables d'états sont alors la déformation totale,  $\bar{\varepsilon}$  et la déformation plastique,  $\bar{\varepsilon}_p$ . Ainsi, le modèle est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'énergie libre spécifique : } \psi(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p) = \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p) : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p), \\ \text{le pseudo-potential de dissipation : } \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}_p) = \sup_{\sigma \in \bar{\mathcal{C}}_s} \{ \bar{\sigma} : \dot{\bar{\varepsilon}}_p \}. \end{array} \right. \quad (\text{C.47})$$

où  $\mathcal{C}_s$  est un domaine fermé borné de  $\mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3$  et défini par une fonction critère (ou seuil),  $f$  telle que :

$$\begin{cases} \text{si } f(\bar{\sigma}) < 0 \text{ alors } \bar{\sigma} \in \mathcal{C}_s - \partial\mathcal{C}_s, \\ \text{si } f(\bar{\sigma}) = 0 \text{ alors } \bar{\sigma} \in \partial\mathcal{C}_s. \end{cases} \quad (\text{C.48})$$

La loi de comportement s'écrit donc sous la forme :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{C}^{-1} \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}_p \text{ avec } \begin{cases} \bar{\varepsilon}_p = 0 \text{ si } f(\bar{\sigma}) < 0, \\ \bar{\varepsilon}_p \text{ arbitraire si } f(\bar{\sigma}) = 0. \end{cases} \quad (\text{C.49})$$

Dans le cas monodimensionnel, avec  $\sigma_s$  le seuil de contrainte, ce modèle est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre : } \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho} k(\varepsilon - \varepsilon_p)^2, \\ \text{la dissipation : } \varphi(\dot{\varepsilon}_p) = \sup_{\sigma \in [-\sigma_s, \sigma_s]} \{\sigma \dot{\varepsilon}_p\}. \end{cases} \quad (\text{C.50})$$

d'où la loi de comportement :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k} + \varepsilon_p \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_p = 0 \text{ si } |\sigma| < \sigma_s, \\ \varepsilon_p \text{ arbitraire si } \sigma = \sigma_s \text{sgn}(\dot{\varepsilon}_p). \end{cases} \quad (\text{C.51})$$

### C.1.3.f Solide élastoplastique écrouissable

Les solides élastoplastiques écrouissables, sont caractérisés par une déformation élastique en deçà d'un seuil de contrainte et un écrouissage plastique pour des valeurs supérieures à ce seuil. Leur réponse lors d'un essai caractéristique d'écrouissage est observable sur la figure FIG. C.12.

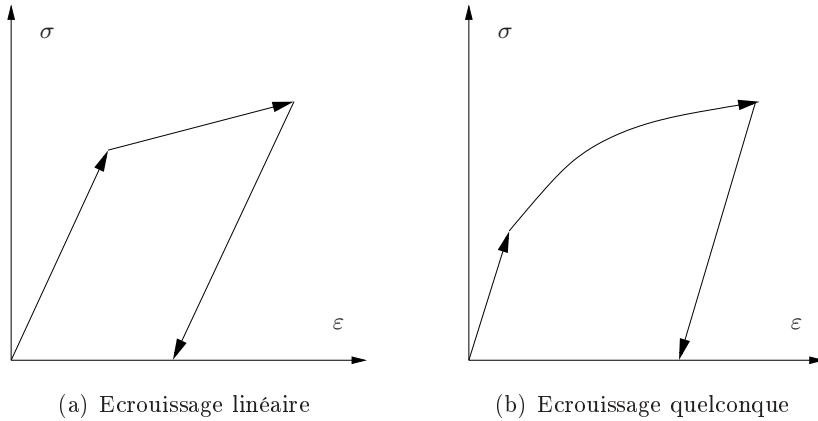
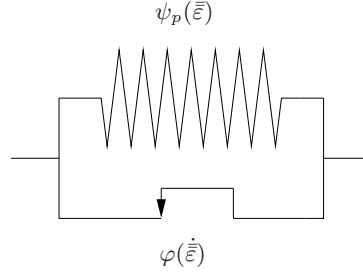


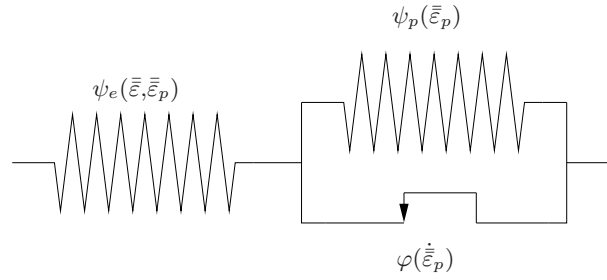
FIGURE C.12 – Réponses académiques aux essais caractéristiques pour un solide élastoplastique écrouissable

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature pour schématiser le comportement élastoplastique écrouissable. Il s'agit d'associations série et/ou parallèle de patins et de ressorts. On peut

citer, comme exemple, le modèle de PRAGER (*cf.* FIG. C.13), association d'un ressort et d'un patin en parallèle. Dans ce cas, on parle d'écrouissage linéaire. Il est dit cinématique lorsqu'il dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, on parle alors d'un modèle rigide-plastique. Cependant, il devient élastoplastique si l'on ajoute un ressort en série.

FIGURE C.13 – *Modèle de PRAGER*

SUQUET [1982] propose le montage en série d'un ressort avec une association en parallèle d'un patin et d'un ressort (*cf.* FIG. C.14).

FIGURE C.14 – *Modèle élastoplastique écrouissable ① [SUQUET, 1982]*

Les variables d'états sont alors la déformation totale,  $\bar{\varepsilon}$  et la déformation plastique,  $\bar{\varepsilon}_p$ . Ainsi, le modèle est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'énergie libre spécifique : } \psi(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p) = \psi_e(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p) + \psi_p(\bar{\varepsilon}_p) \\ \hspace{10em} = \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p) : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p) + \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{K}} \bar{\varepsilon}_p : \bar{\varepsilon}_p, \\ \text{le pseudo-potential de dissipation : } \varphi(\dot{\bar{\varepsilon}}_p) = \sup_{\sigma \in \mathcal{C}_s} \{(\bar{\sigma} - \bar{\bar{K}} \bar{\varepsilon}_p) : \dot{\bar{\varepsilon}}_p\}. \end{array} \right. \quad (\text{C.52})$$

où  $\mathcal{C}_s$  est un domaine fermé borné de  $\mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3$  et défini par une fonction critère (ou seuil),  $f$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } f(\bar{\sigma}) < 0 \text{ alors } (\bar{\sigma} - \bar{\bar{K}} \bar{\varepsilon}_p) \in \mathcal{C}_s - \partial \mathcal{C}_s, \\ \text{si } f(\bar{\sigma}) = 0 \text{ alors } (\bar{\sigma} - \bar{\bar{K}} \bar{\varepsilon}_p) \in \partial \mathcal{C}_s. \end{array} \right. \quad (\text{C.53})$$

La loi de comportement s'écrit donc sous la forme :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{C}}^{-1} \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}_p \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_p = \bar{0} \text{ si } f(\bar{\sigma}) < 0, \\ \bar{\varepsilon}_p = \bar{\bar{K}}^{-1} \bar{\sigma} \text{ si } f(\bar{\sigma}) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{C.54})$$



D'une manière générale, la loi de comportement d'un matériau élastoplastique écrouissable s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \bar{C}^{-1} \bar{\sigma} & \text{si } f(\bar{\sigma}) < 0, \\ \bar{\varepsilon} = \bar{C}^{-1} \bar{\sigma} + g(\bar{\sigma}) & \text{si } f(\bar{\sigma}) = 0. \end{cases} \quad (\text{C.55})$$

où  $g$  est une fonction d'écrouissage caractéristique du matériau.

Dans le cas monodimensionnel, avec  $\sigma_s$  le seuil de contrainte, ce modèle est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre : } \psi(\varepsilon, \varepsilon_p) = \frac{1}{2\rho} k(\varepsilon - \varepsilon_p)^2 + \frac{1}{2\rho} k_p(\varepsilon_p)^2, \\ \text{la dissipation : } \varphi(\dot{\varepsilon}_p) = \sup_{\sigma \in [-\sigma_s, \sigma_s]} \{(\sigma - k_p \varepsilon_p) \dot{\varepsilon}_p\}. \end{cases} \quad (\text{C.56})$$

d'où la loi de comportement :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k} + \varepsilon_p \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_p = 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_s, \\ \varepsilon_p = \frac{\sigma}{k_p} & \text{si } |\sigma| \geq \sigma_s. \end{cases} \quad (\text{C.57})$$

Dans le cas monodimensionnel, on considère la déformation totale comme la somme d'une déformation élastique linéaire et d'une déformation permanente, nulle en deçà du seuil  $\sigma_s$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma}{k} & \text{si } |\sigma| < \sigma_s, \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{k} + g(\sigma) & \text{si } |\sigma| \geq \sigma_s. \end{cases} \quad (\text{C.58})$$

LEMAÎTRE et CHABOCHE [1996] proposent le modèle de SAINT-VENANT généralisé. Il s'agit en fait de l'association en parallèle d'un ressort et de  $N$  branches composées d'un ressort et d'un patin en série (*cf.* FIG. C.15).

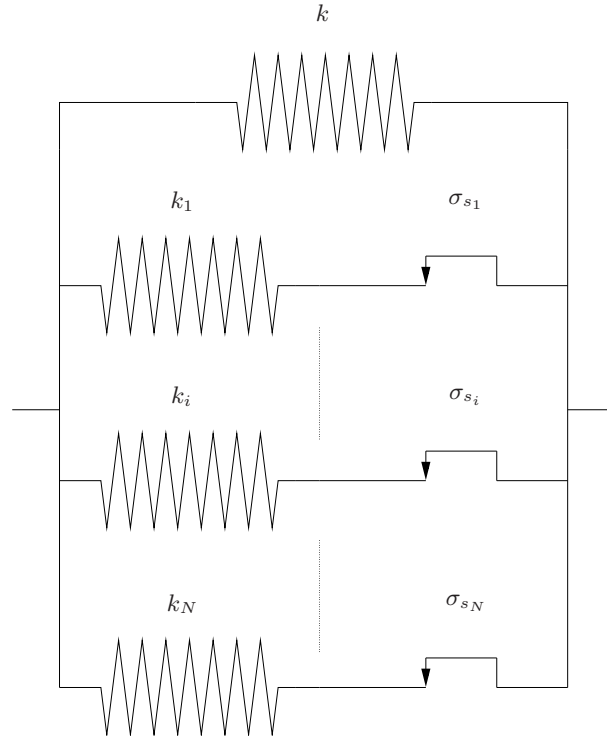
En supposant alors que les  $\sigma_{s_i}$  soient rangés dans l'ordre croissant et que le seuil soit juste atteint pour un élément  $j$ , l'équation constitutive est la suivante :

$$\sigma = \sum_1^j \sigma_{s_i} + \sum_{j+1}^N k_i \varepsilon + k \varepsilon \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma_{s_i}}{k_i} & \text{si } \sigma_i < \sigma_{s_j}, \\ \varepsilon = \frac{\sigma_{s_i}}{k_i} + \varepsilon_{p_i} & \text{si } \sigma_i = \sigma_{s_j}. \end{cases} \quad (\text{C.59})$$

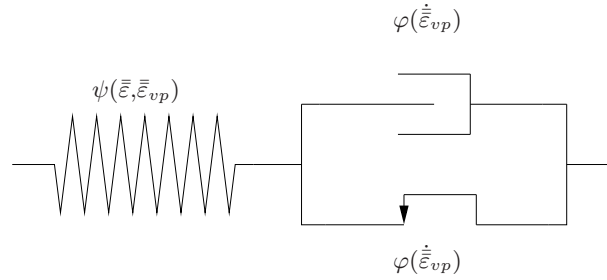
### C.1.3.g Solide élastique parfaitement viscoplastique

Si l'on considère l'élasticité comme négligeable, le solide parfaitement viscoplastique présente, comme le solide parfaitement plastique, des déformations permanentes suite à l'arrêt de sollicitation. Cependant, lorsqu'ils subissent la sollicitation, il se comporte comme un écoulement de fluage fonction du temps. On les représente généralement en utilisant un amortisseur de type NORTON (Viscosité non-linéaire, *cf.* § C.1.1).

Une définition de la viscoplasticité pourrait être une réaction à la contrainte d'une matière, se comportant comme si elle était composée d'un solide plastique et d'un fluide visqueux où

FIGURE C.15 – *Modèle de SAINT-VENANT généralisé [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1996]*

l'écoulement serait dépendant de certains paramètres. SUQUET [1982] précise que les notions "type fluide" et "type solide" ne sont pas d'intersection vide comme le montre le modèle de BINGHAM (*cf.* FIG. C.16).

FIGURE C.16 – *Modèle de BINGHAM*

Sa réponse à un essai unidirectionnel de relaxation est alors :

$$\sigma(t) = k\varepsilon_0 + (k\varepsilon_0 - \sigma_s) \exp\left(\frac{-kt}{\eta}\right). \quad (\text{C.60})$$

Et, sa réponse à un essai unidirectionnel de fluage est alors :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} + \frac{1}{\eta} (\sigma_0 - \sigma_s) t \quad (\text{C.61})$$

On remarque bien alors que ce modèle est de type solide en-dessous du seuil  $\sigma_s$ , et de type fluide au-dessus.

Les auteurs LEMAÎTRE et CHABOCHE [1996], proposent le modèle de BINGHAM-NORTON (cf. FIG. C.17) où l'on associe au solide précédent l'élasticité mais dans ce cas la contrainte dépend uniquement de la vitesse de déformation plastique et on retrouve le modèle de BINGHAM classique, vu précédemment, en posant  $N = 1$ . Les variables d'états sont alors la déformation totale,  $\bar{\varepsilon}$  et

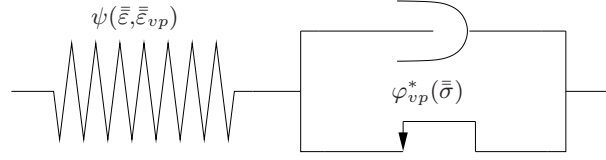


FIGURE C.17 – *Modèle de BINGHAM-NORTON*

la déformation viscoplastique,  $\bar{\varepsilon}_{vp}$ . Ainsi, le modèle est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre spécifique : } \psi(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_{vp}) = \frac{1}{2\rho} \bar{\bar{C}}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{vp}) : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{vp}) \\ \text{le pseudo-potentiel dual de dissipation : } \varphi_{vp}^*(\bar{\sigma}) = \frac{\eta}{N+1} \left( \left\langle \frac{f(\bar{\sigma})}{\eta} \right\rangle \right)^{N+1} \end{cases} \quad (\text{C.62})$$

#### REMARQUE C.6

Le traitement des branches viscoplastiques verra la définition classique du potentiel dual de dissipation (noté  $\varphi^*$  tels que  $\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{\sigma}}$ ). Il est obtenu par transformation de LEGENDRE-FRENCHÉL du potentiel de dissipation  $\varphi$ .  $\square$

Les équations qui régissent le modèle s'écrivent donc sous la forme :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{C}}^{-1} \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}_{vp} \text{ avec } \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{vp} = \bar{0} \text{ si } f(\bar{\sigma}) < 0, \\ \bar{\varepsilon}_{vp} \text{ telle que } \dot{\bar{\varepsilon}}_{vp} = \left\langle \frac{f(\bar{\sigma})}{\eta} \right\rangle^N \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \bar{\sigma}} \text{ si } f(\bar{\sigma}) \geq 0. \end{cases} \quad (\text{C.63})$$

Dans le cas monodimensionnel, avec  $\sigma_s$  le seuil de contrainte, ce modèle est défini par :

$$\begin{cases} \text{l'énergie libre : } \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho} k(\varepsilon - \varepsilon_{vp})^2, \\ \text{le dual de la dissipation : } \varphi^*(\sigma) = \frac{\eta}{N+1} \left( \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_s}{\eta} \right\rangle \right)^{N+1} \end{cases} \quad (\text{C.64})$$

d'où les équations s'écrivent :

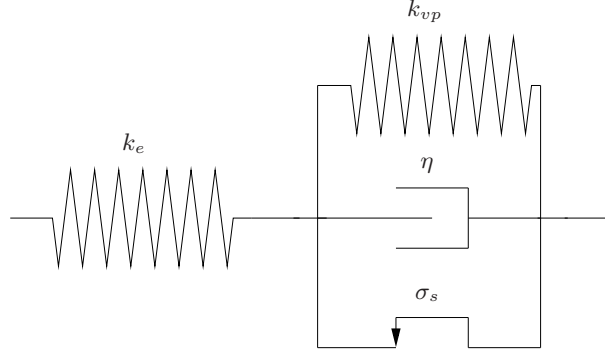
$$\begin{cases} \sigma = k\varepsilon \text{ si } \sigma < \sigma_s, \\ \sigma = k(\varepsilon - \varepsilon_{vp}) = \sigma_s + \eta(\dot{\varepsilon}_{vp})^{\frac{1}{N}} \text{ si } \sigma \geq \sigma_s. \end{cases} \quad (\text{C.65})$$

Ainsi, sa réponse à une sollicitation de relaxation :

$$\sigma(t) = \sigma_s + \frac{k\varepsilon_0 - \sigma_s}{\left[ 1 + \frac{(N-1)k}{\eta^N} (k\varepsilon_0 - \sigma_s)^{N-1} t \right]^{\frac{1}{N-1}}}. \quad (\text{C.66})$$

**REMARQUE C.7**

**Solide élasto-visco-plastique écrouissable** : Pour ce modèle, la contrainte dépend comme précédemment de la vitesse de déformation plastique mais aussi de la déformation plastique ou d'une autre variable d'écrouissage. Dans ce cas, on parle généralement du modèle de BINGHAM généralisé (FIG. C.18).

FIGURE C.18 – *Modèle de BINGHAM généralisé*

On retrouverait l'original de ce modèle en supprimant le ressort en parallèle (si  $k_{vp} = 0$  alors il n'y a pas d'écrouissage). Dans le cas monodimensionnel, en nommant la déformation viscoplastique par  $\varepsilon_{vp}$ , on a alors les équations constitutives  $\sigma = \sigma_e + \sigma_v + \sigma_p$  avec  $\sigma_e = k_{vp}\varepsilon_{vp}$ ,  $\sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}_{vp}$  et  $\sigma_p \leq \sigma_s$ . A ce stade, on peut distinguer trois régimes de fonctionnement, selon la vitesse de déformation viscoplastique :

1.  $\dot{\varepsilon}_{vp} = 0$ ,  $|\sigma_p| = |\sigma - k_{vp}\varepsilon_{vp}| \leq \sigma_s$
2.  $\dot{\varepsilon}_{vp} > 0$ ,  $\sigma_p = \sigma - k_{vp}\varepsilon_{vp} - \dot{\varepsilon}_{vp} = \sigma_s$
3.  $\dot{\varepsilon}_{vp} < 0$ ,  $\sigma_p = \sigma - k_{vp}\varepsilon_{vp} - \dot{\varepsilon}_{vp} = -\sigma_s$

En utilisant les crochets de MAC-CAULEY<sup>(3)</sup>, ces trois cas peuvent se résumer par :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{\langle f \rangle}{\eta} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_e) \text{ avec } f(\sigma, \sigma_e) = |\sigma - \sigma_e| - \sigma_s. \quad (\text{C.67})$$

On retrouve alors le modèle de NORTON en posant  $k_{vp} = 0$  et  $f(\sigma) = |\sigma|^n$ , le modèle de BINGHAM-NORTON en posant  $k_{vp} = 0$  et  $f(\sigma) = \langle |\sigma| - \sigma_s \rangle^n$  □

## C.2 Modèles fractionnaires et méthode d'analyse complexe

Les modèles fractionnaires sont généralement utilisés au dépend de ceux rhéologiques viscoélastiques pour répondre à une volonté de réduire le nombre de paramètres. Cependant, l'inconvénient est que les algorithmes de résolution sont coûteux numériquement.

(3). Les crochets de MAC-CAULEY sont défini de telle sorte que pour une variable  $x$ ,  $\langle x \rangle = \max(x, 0)$

### C.2.1 Formulation générale des modèles fractionnaires, SNOWDON [1968]

Cette méthode s'applique, sous l'hypothèse des petites perturbations, lorsqu'un matériau dissipatif supposé viscoélastique linéaire est sujet à une variation seulement par rapport au temps de la contrainte et de la déformation. Dans ce cas, lors d'une étude unidirectionnelle, la déformation volumique ou de cisaillement n'est plus reliée à la contrainte par une simple constante de proportionnalité (module d'YOUNG,  $E$ , de cisaillement,  $G$ , ou de flexion,  $B$ ). La relation contrainte-déformation est généralement représentée par une équation différentielle d'ordre arbitraire telle que :

$$\underbrace{\left(a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right)}_{{}^a\mathcal{D}_t^n} \sigma = \underbrace{\left(b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + b_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right)}_{{}^b\mathcal{D}_t^m} \varepsilon, \quad (\text{C.68})$$

où  $\sigma$  est la contrainte,  $\varepsilon$  la déformation,  $t$  le temps et  $a_n, b_m$  sont des constantes. En introduisant les opérateurs de dérivation non entière  ${}^a\mathcal{D}_t^k$  appelés aussi dérivées fractionnaires, l'équation C.68 devient :

$$\sigma + \sum_{k=1}^n a_k {}^a\mathcal{D}_t^k \sigma = k_0 \varepsilon + \sum_{k=1}^m b_k {}^b\mathcal{D}_t^k \varepsilon, \quad (\text{C.69})$$

avec  $k_0 = \frac{b_0}{a_0}$ . [SAAD, 2003] propose que l'opérateur de dérivation non entière d'ordre  $k$  tel que  $k \geq 0$  peut être défini à partir de deux expressions différentes :

- une définition exacte mais difficile de mise en oeuvre telle que

$$\mathcal{D}_t^k f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-k)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t-t')}{t'^k} dt' \quad \text{où} \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx, \quad (\text{C.70})$$

- une approximation numérique : on suppose  $h$  infiniment petit tel que

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^k f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_k(i) f(t - ih), \\ C_k(i) = \frac{(-1)^i}{h^k} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!}. \end{cases} \quad (\text{C.71})$$

A partir de la relation C.69, on peut alors écrire les lois qui régissent les modèles rhéologiques sous une forme fractionnaire :

- un élément ressort de raideur  $k_0$ ,

$$\sigma = \kappa k_0 \varepsilon, \quad (\text{C.72})$$

Ici  $a_0$  et  $b_0$  sont finis,  $\kappa$  est constant. Cette équation donne directement la loi de HOOKE.

- un élément amortisseur de viscosité  $\eta_0$ ,

$$\sigma = \kappa \eta_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon. \quad (\text{C.73})$$

Ici  $a_0$  et  $b_1$  sont finis. Cette équation donne directement la loi de NEWTON visqueuse.

- modèle de KELVIN-VOIGT (cf. FIG. C.6),

$$\sigma = \kappa \left[ k_0 + \eta_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon \quad \text{ou bien} \quad \sigma = \kappa \left( k_0 + b_1 {}^b\mathcal{D}_t^1 \right) \varepsilon. \quad (\text{C.74})$$

Ici  $a_0$ ,  $b_0$  et  $b_1$  sont finis.

- modèle de ZENER (cf. FIG. C.8),

$$\begin{aligned} \left[ k_1 + \eta_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \sigma &= \kappa \left[ k_0 k_1 + (k_0 + k_1) \eta_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon \\ \text{ou bien} \quad (1 + a_1 {}^a\mathcal{D}_t^1) \sigma &= \kappa \left( k_0 + b_1 {}^b\mathcal{D}_t^1 \right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Ici  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  et  $b_1$  sont finis.

- modèle de KELVIN-VOIGT avec deux branches de MAXWELL en parallèle,

$$\begin{aligned} &\left\{ k_1 k_2 + (k_1 \eta_2 + k_2 \eta_1) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + \eta_1 \eta_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right\} \sigma \\ &= \kappa \left\{ k_0 k_1 k_2 + [k_1 k_2 (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) \right. \\ &\quad \left. + k_0 (k_1 \eta_2 + k_2 \eta_1)] \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + [\eta_1 \eta_2 (k_0 + k_1 + k_2) \right. \\ &\quad \left. + \eta_0 (k_1 \eta_2 + k_2 \eta_1)] \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \eta_0 \eta_1 \eta_2 \left( \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \right\} \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

$$\text{ou bien} \quad \left( 1 + \sum_{k=1}^2 a_k {}^a\mathcal{D}_t^k \right) \sigma = \kappa \left( k_0 + \sum_{k=1}^2 b_k {}^b\mathcal{D}_t^k \right) \varepsilon. \quad (\text{C.77})$$

Ici  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont finis.

### REMARQUE C.8

Il est possible d'ajouter un grand nombre de branches de MAXWELL au modèle de KELVIN-VOIGT suivant l'ordre choisit pour l'équation C.68.  $\square$

Puisqu'une définition temporelle conduit à des algorithmes coûteux numériquement, on utilise généralement cette relation en fréquence associée.

Lorsque la déformation et la contrainte varient de manière sinusoïdale, la  $m^{\text{ième}}$  ou  $n^{\text{ième}}$  dérivée partielle de la déformation ou de la contrainte peut s'écrire respectivement sous la forme  $(j\omega)^m \varepsilon^*$  et  $(j\omega)^n \sigma^*$  où  $j = \sqrt{-1}$  et  $\omega$  la pulsation. On utilise pour cela la transformée de FOURIER de la dérivée généralisée telle que :

$$TF[{}^i\mathcal{D}_t^k f(t) = (j\omega)^k TF[f(t)]] \text{ avec } k = m \text{ ou } n. \quad (\text{C.78})$$

On peut alors réduire l'équation Eq. C.68 en une équation algébrique du type :

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^n a_k (j\omega)^k \right) \sigma^* = \left( k_0 + \sum_{k=1}^m b_k (j\omega)^k \right) \varepsilon^*, \quad (\text{C.79})$$

si bien que le module dynamique  $k^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}$  peut s'exprimer comme suit :

$$k^*(\omega) = \frac{k_0 + \sum_{k=1}^m (j\omega)^k b_k}{1 + \sum_{k=1}^n (j\omega)^k a_k}. \quad (\text{C.80})$$

On obtient alors directement les modules dynamiques associés aux modèles fractionnaires de KELVIN-VOIGT et ZENER définis respectivement par :

$$k^*(\omega) = k_0 + b(j\omega) \text{ et } k^*(\omega) = \frac{k_0 + b(j\omega)}{1 + a(j\omega)}, \quad (\text{C.81})$$

On peut, par exemple, utiliser cette forme pour représenter le noyau de relaxation de la formulation fonctionnelle de la viscoélasticité linéaire.

On peut simplifier l'écriture de l'équation C.80 telle que :

$$\frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{b'(\omega) + jb''(\omega)}{\underbrace{a'(\omega) + ja''(\omega)}_{H(j\omega)}}, \quad (\text{C.82})$$

où  $a'(\omega)$ ,  $a''(\omega)$ ,  $b'(\omega)$  et  $b''(\omega)$  sont fonctions de la fréquence et  $H(j\omega)$  est une fonction de transfert liant  $\sigma^*$  et  $\varepsilon^*$ . En introduisant la notion de module dynamique complexe, on peut exprimer  $H(j\omega) = E^*(j\omega)$  de tel sorte que :

$$E_\omega^* = E'_\omega + jE''_\omega = E'_\omega(1 + j\Delta_{E_\omega}), \quad (\text{C.83})$$

où  $E'_\omega$  et  $E''_\omega$  respectivement partie réelle (module de gain) et partie imaginaire (module de perte) de  $E^*$ .

La quantité  $\Delta_{E_\omega} = \frac{E''_\omega}{E'_\omega}$  représente alors le facteur de perte ou d'amortissement. Il correspond à l'énergie dissipée telle que :

$$\Delta_{E_\omega} = \frac{1}{\pi} \frac{\text{Energie dissipée par cycle}}{\text{Energie maximale stockée par cycle}}. \quad (\text{C.84})$$

### C.2.2 Application à la caractérisation dynamique des matériaux

On considère ici une déformation sinusoïdale cyclique telle que  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ . La caractérisation dynamique des matériaux s'effectue généralement sous l'hypothèse que la réponse en contrainte est de type sinusoïdale<sup>(4)</sup> avec un déphasage  $\delta$  ou angle de perte, telle que :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta). \quad (\text{C.85})$$

La relation contrainte-déformation utilisée est celle proposée par le modèle de KELVIN-VOIGT dont l'énergie dissipée au cours d'un cycle, correspond à l'aire de l'ellipse (cf. FIG. C.19). Elle s'exprime sous la forme :

$$\Phi_{/cycle} = \oint \sigma d\varepsilon = \sigma_0 \varepsilon_0 \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t + \delta) dt = \pi \sigma_0 \varepsilon_0 \sin(\delta). \quad (\text{C.86})$$

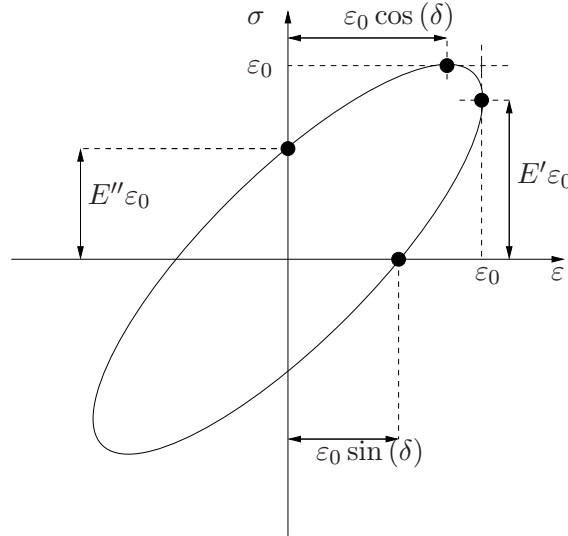


FIGURE C.19 – *Hystérésis de forme elliptique*

Les grandeurs caractéristiques vues précédemment s'écrivent alors telles que :

- le module dynamique :  $|E^*| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ ,
- le module de stockage (gain) :  $E' = |E^*| \cos(\delta)$ , partie réelle du module dynamique représentant l'énergie emmagasinée et restituée au cours d'un cycle,
- le module de perte :  $E'' = |E^*| \sin(\delta)$ , partie imaginaire du module dynamique représentant l'énergie dissipée sous forme de chaleur pendant un cycle,
- le facteur de perte :  $\Delta_E = \frac{E''}{E'} = \tan(\delta)$ , .

---

(4). Cette hypothèse est souvent peu suffisante et typiquement la réponse en effort contient des harmoniques d'ordre supérieur, et la réponse réelle est de la forme  $\sigma(t) = \sum_k \sigma_k \sin(k\omega t + \delta_k)$ .





**Résumé :**

Les modèles rhéologiques généralisés aux grandes déformations sont classiquement employés pour caractériser le comportement dissipatif des élastomères. En effet, l'utilisation de modèles unitaires (*i.e.* mono-branches) hyper-viscoélastiques tels que ZENER ou POYNTING-THOMSON permet une bonne représentativité d'un temps caractéristique de relaxation. dès lors, il semble qu'un modèle de MAXWELL généralisé (*i.e.* multi-branches) permettra de couvrir un large spectre de temps caractéristiques de relaxation mais le problème réside alors dans l'identification du nombre important de paramètres. Nous proposons donc une approche statistique qui généralisera les assemblages mono-branches à une infinité de branches. L'apport de cette méthode réside, en une couverture d'un large spectre de fréquences à savoir les avantages d'un modèle multi-branches, sans pour autant augmenter le nombre de paramètres du modèle. On propose alors la fabrication d'un modèle hyper-visco-élastique auquel on associe une branche élastoplastique pour permettre une meilleure représentation d'un phénomène d'assouplissement suivant l'amplitude dynamique de sollicitation. On élabore alors une stratégie d'identification des paramètres du modèle statistique hyper-visco-plastique que l'on applique à notre matériau à température ambiante. On réalise ensuite une confrontation du modèle ainsi identifié avec des essais cycliques harmoniques d'ordre inférieur ou égal à trois. l'utilisation de ce modèle offrant des résultats satisfaisants, on réalise une campagne d'identification du modèle à différentes températures.

**Mots clefs :** élastomère, modélisation, grandes déformations, hyperélasticité, viscoélasticité, élastoplasticité.

**Abstract :**

The rheological models generalized to finite deformation are classically used to characterize the hyper-visco-elastic behavior of filled elastomers. However, the simple rheological models, such as the model of Zener or that of Poynting-Thomson, suitably reflect the behavior in a limited domain of frequency of loading. Consequently, the use of the generalized Maxwell model (with a high number of branches) can be necessary to cover a wide frequency spectrum. However, this model requires the identification of a large number of characteristic parameters in order to represent the behavior of material. In this work, we present a statistical approach allowing the generalization of discrete rheological models to continuous models comprising an infinity of branches, without significantly increasing the number of parameters to be identified. In order to better represent the softening of material at high amplitudes, the model proposed here is based on the association of the statistical hyper-visco-elastic model with an elastoplastic branch. We thus obtain a statistical hyper-visco-elasto-plastic model comprising 6 characteristic parameters. To identify these parameters for the behavior of material, a campaign of experimental tests was undertaken at controlled temperatures (of  $-55^{\circ}C$  to  $+70^{\circ}C$ ). These experimental tests were carried out on double-shearing test-piece constituted of a siliconed elastomer filled with silica : - subjected to triangular cyclic loading (at various deformation rates and various amplitudes) ; - in relaxation test at various levels of deformation. Finally, comparison of the model thus identified with results of experimental validation tests performed under multi-harmonic loading shows the good representativeness of the model for a relatively wide frequency spectrum and a large field of deformation.

**keywords :** elastomer, modelisation, large strains, viscoelasticity, hyperelasticity, elastoplasticity.